# 2 Matrizen und lineare Gleichungssysteme

## 2.1 Körper

### Definition 2.1.1: Endlicher Körper $\mathbb{F}_p$ / Lemma 2.1.3 / Satz 2.1.4

$\mathbb{F}_p$ als Körper definiert mit den Elementen $\{0, 1, \ldots, p-1\}$, Addition $x + y := (x + y) \mod p$ und Multiplikation $xy := xy \mod p$.

$\forall x \in \mathbb{F}_p, x \neq 0, \exists y \in \mathbb{F}_p : xy = 1$

## 2.2 Matrizen

### Definition 2.2.1: Matrix / Definition 2.2.3: Nullmatrix, Einheitsmatrix

$m, n \geq 1$, eine $(m \times n)$-Matrix mit Werten in $K$, oder $A \in M_{m\times n}(K)$ hat $m$ Zeilen und $n$ Spalten, schreibe $A = (a_{ij})$ mit Eintrag $a_{ij}$ in Zeile $i$ und Spalte $j$.

$\mathbb{0}_{m\times n} \in M_{m\times n}(K)$ besteht nur aus Nullen. Die Einheitsmatrix $\mathbb{1}_n$ ist definiert als $a_{ij} = \delta_{ij}$.

### Definition 2.2.5: Addition und Skalarmultiplikation / Theorem 2.2.7

1. $A, B \in M_{m\times n}(K)$, dann ist $C = A + B$ mit $c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$.
2. $A \in M_{m\times n}(K), \alpha \in K$, dann ist $D = \alpha A$ mit $d_{ij} := \alpha a_{ij}$.

$A, B, C \in M_{m\times n}(K), \alpha, \beta \in K$

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $A + \mathbb{0}_{m\times n} = \mathbb{0}_{m\times n} + A = A$
4. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
5. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
6. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

## Definition 2.2.8: Matrixmultiplikation / Theorem 2.2.10 / Beispiel 2.2.13

$A \in M_{m\times n}(K), B \in M_{n\times p}(K)$, dann ist $C = AB$ mit $c_{ik} := \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$.

$A \in M_{m\times n}(K), B \in M_{n\times p}(K), C \in M_{p\times q}(K), D \in M_{n\times p}(K), \alpha \in K$

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $A(B + C) = AB + AC$
3. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

$A \in M_{n\times n}(K) \implies A\mathbb{1}_n = \mathbb{1}_n A = A$

## Definition 2.2.14: Kommutierende Matrizen / Definition 2.2.17: Diagonale und Dreiecksmatrizen / Definition 2.2.19: Invertierbare Matrizen / Lemma 2.2.20

$A, B \in M_{n\times n}(K)$ kommutieren $\iff AB = BA$.

$A \in M_{n\times n}(K)$

1. $A$ ist diagonal $\iff a_{ij} = 0, \forall i \neq j$
2. $A$ ist eine obere Dreiecksmatrix $\iff a_{ij} = 0, \forall i > j$

$A \in M_{n\times n}(K)$ ist invertierbar
$\iff \exists B \in M_{n\times n}(K) : AB = BA = \mathbb{1}_n \implies B = A^{-1}$.

## Theorem 2.2.23

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

# 2.3 Elementare Zeilenoperationen

## Definition 2.3.1: Elementare Zeilenoperationen/-umformungen / Definition 2.3.2: Zeilenäquivalent

- $P(r, s)$: Zeilen $r$ und $s$ vertauschen
- $M(r, \lambda)$: Multiplikation der Zeile $r$ mit $\lambda \neq 0$
- $S(r, s, \lambda)$: Addition von $\lambda$ mal Zeile $r$ zu Zeile $s$

$A, A'$ heissen zeilenäquivalent, wenn man $A'$ durch endlich viele elementare Zeilenoperationen auf $A$ erhält.

### Definition 2.3.5: Reduzierte Zeilenform / Theorem 2.3.7 / Definition 2.3.8: Reduzierte Zeilenstufenform / Theorem 2.3.9

$A$ ist in reduzierter Zeilenform $\iff$

1. In jeder Zeile ist der erste Eintrag $\neq 0$ eine $1$ (führende $1$).
2. Ausser einer führenden $1$ sind in derselben Spalte nur $0$.

$\forall A \in M_{m\times n}(K), \exists A' \in M_{m\times n}(K)$ in reduzierter Zeilenform sodass $A, A'$ zeilenäquivalent sind.

$A$ ist in reduzierter Zeilenstufenform $\iff$

1. $A$ ist in reduzierter Zeilenform.
2. Alle Nullzeilen sind zuunterst.
3. Die führende $1$ einer Zeile liegt immer rechts derjenigen in der Zeile darüber.

$\forall A \in M_{m\times n}(K), \exists A' \in M_{m\times n}(K)$ in reduzierter Zeilenstufenform sodass $A, A'$ zeilenäquivalent sind.

## 2.4 Lineare Gleichungssysteme

### Definition 2.4.2: Lineares Gleichungssystem in Matrixform

$(S)$ : $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem

1. $L(S) = \{x \in K^n \mid Ax = b\}$
2. $A|b$ ist $A$ um die Spalte $b$ erweitert

### Theorem 2.4.5

$(S)$ : $Ax = b, (S')$ : $A'x = b'$ mit $A|b, A'|b'$ zeilenäquivalent $\implies L(S) = L(S')$.

# 3 Vektorräume

## 3.1 Definitionen und Beispiele

### Definition 3.1.1: Vektorraum / Satz 3.1.4 / Korollar 3.1.5 / Satz 3.1.6

Ein Vektorraum $V$ über einen Körper $K$ ist eine Menge mit

- Addition: $v + w, v, w \in V$
- Skalarmultiplikation $\alpha v, \alpha \in K, v \in V$
  sodass

1. $v + w = w + v, \forall v, w \in V$
2. $v + (w + u) = (v + w) + u, \forall v, w, u \in V$
3. $\exists! 0_V \in V : \forall v \in V : 0_V + v = v$
4. $\forall v \in V, \exists! w \in V : v + w = 0_V \implies w = -v$
5. $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w, \forall \lambda \in K, v, w, \in V$
6. $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v, \forall \lambda, \mu \in K, v \in V$
7. $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v, \forall \lambda, \mu \in K, v \in V$
8. $1v = v, \forall v \in V$

$\lambda \in K, v \in V$

1. $\lambda 0_V = 0_V$
2. $0v = 0_V$
3. $(-\lambda)v = -(\lambda v) = \lambda(-v)$
4. $\lambda v = 0_V \implies \lambda = 0 \vee v = 0_V$

# 3.2 Unterräume

### Definition 3.2.1: Unterraum / Satz 3.2.2

$U \subseteq V$ ist ein Unterraum $\iff U \neq \varnothing$ und abgeschlossen unter Addition und Skalarmultiplikation:

1. $u + v \in U, \forall u, v \in U$
2. $\lambda u \in U, \forall \lambda \in K, u \in U$
   Schreibe $U \leq V$.

$U \leq V \iff$

1. $0_V \in U$
2. $\lambda u + v \in U, \forall \lambda \in K, u, v, \in V$

## Satz 3.2.4 / Bemerkung 3.2.5

$v_1, \ldots, v_n \in V, U = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \mid \lambda_i \in K\} = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle \leq V$ heisst die lineare Hülle von $v_1, \ldots, v_n$.

$\{0_V\} = \langle \varnothing \rangle$

## Satz 3.2.8 / Theorem 3.2.9

- $U \leq V \implies U$ ist ein Vektorraum.
- $W \leq U \leq V \implies W \leq V$

$U, W \leq V$

1. $U \cap W := \{v \in V \mid v \in U \wedge v \in W\} \leq V$
2. $U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\} \leq V$

# 3.3 Basen von Vektorräumen

## Definition 3.3.3: Endlich-Dimensional, Erzeugendensystem

$V$ heisst endlich-dimensional $\iff \exists v_1, \ldots, v_n$ endlich viele, sodass $V = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$; dann heisst $\{v_1, \ldots, v_n\}$ Erzeugendensystem.

## Definition 3.3.6: Linear (Un-)Abhängig / Satz 3.3.8

$\{v_1, \ldots, v_n\}$ heisst linear unabhängig, wenn $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V \implies \alpha_i = 0, \forall i$. Sonst heisst $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear abhängig.

$v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig $\implies \forall v \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ kann eindeutig dargestellt werden.

## Lemma 3.3.10 / Lemma 3.3.11 / Satz 3.3.12

$v_1, \ldots, v_n \in V$

- $v_i = \lambda v_j, \lambda \in K, \lambda \neq 0, i \neq j \implies$ linear abhängig

- $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig und $c_1, \dots, c_n \in K$, alle $\neq 0 \implies c_1v_1, \dots, c_nv_n$ linear unabhängig
- $0_V = v_i \implies$ linear abhängig

1. $v \in V, v \neq 0_V \implies v$ linear unabhängig
2. $0_V$ ist linear abhängig

$v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig, $v_{n+1} \notin \langle v_1, \dots, v_n \rangle \implies v_1, \dots, v_n, v_{n+1}$ linear unabhängig.

## Definition 3.3.13: Basis

Eine Basis von $V$ ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.

## Theorem 3.3.15 / Korollar 3.3.16

Jedes endliche Erzeugendensystem enthält eine Basis.

Jeder endlich-dimensionale Vektorraum hat eine Basis.

## Lemma 3.3.17: Austauschlemma / Satz 3.3.19: Austauschsatz / Korollar 3.3.20

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von $V$ mit
$w \in V, w \neq 0_V, w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, \alpha_j \neq 0 \implies B' = \{v_1, \dots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \dots, v_n\}$ auch eine Basis von $V$.

$v_1, \dots, v_n$ Basis von $V$ mit $w_1, \dots, w_k$ linear unabhängig $\implies k \leq n, \exists (n-k)$ Basisvektoren, die zusammen mit $w_1, \dots, w_k$ eine Basis von $V$ bilden.

Alle Basen von $V$ haben dieselbe Anzahl Elemente.

## Definition 3.3.21: Dimension

$B$ Basis von $V$, dann ist die Dimension von $V$ definiert als $\dim_K V = |B|$. Wenn $V$ nicht endlich-dimensional, dann ist $\dim_K V = \infty$.

## Satz 3.3.23 / Satz 3.3.24

$\dim V = n, v_1, \dots, v_n \in V$, äquivalente Aussagen:

1. $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig

2. $v_1, \ldots, v_n$ Erzeugendensystem
3. $v_1, \ldots, v_n$ Basis
4. $k < n \implies v_1, \ldots, v_n$ kein Erzeugendensystem
5. $k > n \implies v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig

## 3.4 Basen von Unterräumen

### Theorem 3.4.4

$V$ endlich-dimensional mit $U, W \leq V$, dann gilt:
$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

*Kann nicht einfach für drei Unterräume angepasst werden.*

### Definition 3.4.7: Komplement

$U \leq V$, dann ist $W$ ein Komplement von
$U \iff U + W = V \wedge U \cap W = \{0_V\} \iff U \oplus W = V$.

# 4 Lineare Abbildungen

## 4.1 Definition und Beispiele

### Definition 4.1.1: Homomorphismus / Endomorphismus

$T : V \to W$ ist linear oder heisst Homomorphismus falls
$T(\alpha v + u) = \alpha Tv + Tu, \forall \alpha \in K, u, v \in V$.

$T : V \to V$ heisst Endomorphismus.

## 4.2 Kern und Bild

### Definition 4.2.1: Kern / Bild / Lemma 4.2.3

$T : V \to W$ linear.

1. Der Kern von $T$ ist $\ker(T) := \{v \in V \mid Tv = 0_W\} \leq V$.
2. Das Bild von $T$ ist $\operatorname{im}(T) := \{Tv \mid v \in V\} \leq W$.

### Satz 4.2.6

$T : V \to W$ ist injektiv $\iff \ker(T) = \{0_V\}$.

## Definition 4.2.8: Rang

$\mathrm{rk}(T) := \dim(\mathrm{im}(T))$

## Theorem 4.2.9

$T : V \to W$ linear. $\dim V = \mathrm{rk}\, T + \dim \ker T$

## Korollar 4.2.10

$T : V \to W$ linear.

1. $\dim W < \dim V \implies T$ nicht injektiv.
2. $\dim W > \dim V \implies T$ nicht surjektiv.
3. $\dim W = \dim V \implies T$ bijektiv $\iff T$ injektiv $\iff T$ surjektiv

## Definition 4.2.13: Isomorphismus / Bemerkung 4.2.17

$T : V \to W$ heisst Isomorphismus, falls $\exists S : W \to V : ST = \mathrm{id}_V \wedge TS = \mathrm{id}_W$, wir schreiben $S = T^{-1} \iff T = S^{-1}$.

$\exists T : V \to W$ Isomorphismus $\iff V \cong W$.

$T : V \to V$ Isomorphismus heisst Automorphismus.

## Theorem 4.2.22

$\dim_K V = \dim_K W \iff V \cong W$

# 4.3 Lineare Abbildungen als Matrizen

## Definition 4.3.1: Abbildungsmatrix

$T : V \to W$ mit Basen $B, C$ von $V, W$. Die Abbildungsmatrix von $T$ ist $[T]_C^B = (a_{ij})$ mit $Tb_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} c_i$.

## Satz 4.3.7

$V, W, U$ mit Basen $A, B, C$ und $T : V \to W, S : W \to U$, dann gilt: $[ST]_C^A = [S]_C^B [T]_B^A$.

# 4.4 Matrizen als Lineare Abbildungen

## Lemma 4.4.3 / Bemerkung 4.4.4

1. $L_{[T]_C^B} = T$
2. $[L_A]_C^B = A$

Nicht kanonisch, sondern von Basen abhängig!

## Satz 4.4.5

$T$ ist ein Isomorphismus $\iff$ $[T]_B^B$ invertierbar, dann gilt: $[T^{-1}]_B^B = ([T]_B^B)^{-1}$.

# 4.5 Basiswechsel

## Definition 4.5.1: Basiswechselmatrix / Satz 4.5.3

$V$ mit Basen $B, B'$, dann ist die Basiswechselmatrix von $B$ nach $B'$ als Koeffiziententransformationsmatrix $[\mathrm{id}]_{B'}^B$ mit $[\mathrm{id}]_B^{B'} = ([\mathrm{id}]_{B'}^B)^{-1}$.

## Theorem 4.5.5

$T : V \to W$ mit Basen $B, B', C, C'$, dann gilt: $[T]_{C'}^{B'} = [\mathrm{id}_W]_{C'}^C [T]_C^B [\mathrm{id}_V]_B^{B'}$.

## Definition 4.5.10: Ähnlich, Äquivalent / Korollar 4.6.3

1. $A, B$ sind ähnlich falls $\exists P \in GL_n : B = P^{-1}AP$, schreibe $A \sim B \iff \mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B)$.
2. $A, B$ sind äquivalent falls $\exists P, Q \in GL_n : B = PAQ$ (auch für nicht-quadratische Matrizen).

# 4.6 Zeilenrang = Spaltenrang

## Definition 4.6.5: Transponierte

$B = A^\top$ mit $b_{ij} = a_{ji}$

# 4.7 Zurück zu Linearen Gleichungssystemen

## Lemma 4.7.1

$\dim L(S_A) = n - \text{rk}(A)$

### Satz 4.7.9 / Korollar 4.7.10

$A \in M_{m\times n}(K)$

$\text{rk}(A) = \text{rk}(A|b) \iff Ax = b$ hat eine Lösung.

$\text{rk}(A) = \text{rk}(A|b) = n \iff Ax = b$ hat genau eine Lösung.

---

# 5 Gruppen und Ringe

## 5.1 Gruppen

### Definition 5.1.1: Gruppe

Eine Gruppe ist eine Menge $G$ mit einer Operation $+ : G \times G \to G$ mit

1. $(g+h)+k = g+(h+k), \forall g,h,k \in G$
2. $\exists 0 \in G : g+0 = 0+g = g, \forall g \in G$
3. $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G : g + g^{-1} = g^{-1} + g = 0$
4. abelsch: $g+h = h+g, \forall g,h \in G$

## 5.2 Ringe

### Definition 5.2.1: Ring

Ein Ring ist eine Menge $R$ mit zwei Operationen $+, \cdot : R \times R \to \mathbb{R}$ mit

1. $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe
2. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall a,b,c \in R$
3. $\exists 1 \in R : 1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \forall a \in R \setminus \{0\}$
4. $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \wedge (b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a, \forall a,b,c \in R$
5. kommutativ: $a \cdot b = b \cdot a, \forall a,b \in R$

---

# 6 Vektorräume Linearer Abbildungen

# 6.1 Definition und erste Eigenschaften

## Definition 6.1.1: Vektorraum der Homomorphismen / Satz 6.1.2 / Korollar 6.1.4

$\mathrm{Hom}_K(V,W) = \{T : V \to W \mid T \text{ linear}\}$ ist ein Vektorraum mit $\dim \mathrm{Hom}_K(V,W) = \dim V \dim W$.

# 6.2 Der Duale Vektorraum

## Definition 6.2.1: Dualraum

$V^* := \mathrm{Hom}_K(V,K)$

## Definition 6.2.4: Elemente des Dualraums / Satz 6.2.5 / Definition 6.2.7: Duale Basis

$V$ mit Basis $B = (v_1, \ldots, v_n)$, dann ist $B^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ eine Basis von $V^*$ (genannt duale Basis) mit $v_i^*(v_j) := \delta_{ij}$.

## Satz 6.2.9 / Korollar 6.2.10

$[\mathrm{id}]_{C^*}^{B^*} = ([\mathrm{id}]_B^C)^\top = (([\mathrm{id}]_C^B)^{-1})^\top$

# 6.3 Die Duale Abbildung

## Definition 6.3.1: Duale Abbildung

$T^* : W^* \to V^*, \ell \mapsto \ell \circ T$

## Satz 6.3.5 / Theorem 6.3.9

$(ST)^* = T^*S^*$

$[T^*]_{B^*}^{C^*} = ([T]_C^B)^\top$

# 6.4 Annullator

## Definition 6.4.1: Annullator

$U \leq V$, dann ist der Annullator
$U^\perp := \{\ell \in V^* \mid \ell u = 0_V, \forall u \in U\} = \{\ell \in V^* \mid \ell U = \{0_V\}\}$.

Oder: $\ell \in U^\perp \iff U \leq \ker \ell$.

### Theorem 6.4.5

$U \leq V : \dim U + \dim U^\perp = \dim V$

### Satz 6.4.6 / Korollar 6.4.7

1. $(\operatorname{im} T)^\perp = \ker(T^*)$
2. $(\ker T)^\perp = \operatorname{im}(T^*)$
3. $T$ ist injektiv $\iff$ $T^*$ ist surjektiv
4. $T$ ist surjektiv $\iff$ $T^*$ ist injektiv

## 6.5 Reflexivität

### Definition 6.5.1: Bidualraum

Bidualraum: $V^{**} := (V^*)^*$

# 7 Quotientenräume

## 7.1 Definition und Erste Eigenschaften

### Definition 7.1.1: Quotientenraum

$U \leq V$, dann ist der Quotientenraum
$V/U := \{[v] \mid v \in V\} = \{v + U \mid v \in V\} = \{\{v + u \mid u \in U\} \mid v \in V\}$.

### Satz 7.1.4 / Korollar 7.1.5 / Satz 7.1.6

$q_U : V \to V/U, v \mapsto [v]$ die kanonische Quotientenabbildung mit $\ker(q_U) = U$ und $\operatorname{im}(q_U) = V/U$.

$\dim V/U = \dim V - \dim U$

$U, W \leq V$ mit $U \oplus W = V$, damit ist $\gamma : W \xrightarrow{\cong} V/U$ mit $\gamma = q_U \,\big|_W$.

### Satz 7.1.10

$\{W \subseteq V : U \leq W \leq V\} \to \{X \leq V/U\}, W \mapsto W/U$ ist eine $1:1$ Korrespondenz.

## 7.2 Die Isomorphiesätze

### Theorem 7.2.1: Erster Isomorphiesatz

$T : V \to W$, damit $\overline{T} : V/\ker(T) \to \operatorname{im}(T)$ mit

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "q_{\ker(T)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & W \\
V/\ker(T) \arrow[r, "\overline{T}"] & \operatorname{im}(T) \arrow[u, "\subseteq"']
\end{tikzcd}$$

### Theorem 7.2.2: Zweiter Isomorphiesatz

$U, W \leq V$ mit $\imath : U \hookrightarrow V \xrightarrow{q_W} V/W, u \mapsto q_W(u)$, somit $\ker(\imath) = U \cap W$ und induziert $\overline{\imath} : U/(U \cap W) \xrightarrow{\cong} (U+W)/W$.

### Satz 7.2.3

$U \leq W \leq V$ mit $\varpi_{U,W} : V/U \to V/W, v + U \mapsto v + W$ und

$$\begin{tikzcd}
& V \arrow[dl, "q_U"'] \arrow[dr, "q_W"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\
V/U \arrow[rr, "\varpi_{U,W}"] & & V/W
\end{tikzcd}$$

### Theorem 7.2.4 Dritter Isomorphiesatz

$U \leq W \leq V$, dann ist $\ker(\varpi_{U,W}) = W/U$ und $\overline{\varpi_{U,W}} : (V/U)/(W/U) \xrightarrow{\cong} V/W$.

# 8 Determinanten

# 8.2 Permutationen

## Definition 8.2.1: Permutation / Transposition / Satz 8.2.3 / Satz 8.2.6 / Definition 8.2.11: Vorzeichen der Permutation

$\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ bijektiv heisst Permutation. Eine Transposition vertauscht nur zwei Elemente.

$\{\sigma\} = S_n$ ist eine Gruppe unter $\circ$ mit $n!$ Elementen.

Jede Permutation kann als endliche Verknüpfung von Transpositionen geschrieben werden.

Eine Permutation heisst gerade oder ungerade abhängig von der Anzahl nötigen Transpositionen. $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$ wenn gerade, $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$ wenn ungerade.

# 8.2 Determinantenfunktionen

## Definition 8.3.2: $n$-Linearität / Definition 8.3.5: Alternierend

$f$ heisst $n$-linear, wenn
$f(v_1, \ldots, \lambda v_i + u, \ldots, v_n) = \lambda f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + f(v_1, \ldots, u, \ldots, v_n)$.

$f$ heisst alternierend, wenn für $v_i = v_{i+1} \implies f(v_1, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n) = 0$.

## Lemma 8.3.7

Wenn $f$ alternierend und $n$-linear ist, gilt:

1. $f(v_1, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n) = -f(v_1, \ldots, v_{i+1}, v_i, \ldots, v_n)$
2. $v_i = v_j, i \neq j \implies f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = 0$
3. $f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$

## Definition 8.3.8: Determinantenfunktion / Korollar 10.2.2

Eine Determinantenfunktion $D$ ist

1. $n$-linear in den Spalten/Zeilen
2. alternierend in den Spalten/Zeilen

3. $D(\mathbb{1}_n) = 1$

### Theorem 8.3.16

$D(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$

# 10 Zurück zu Determinanten

## 10.2 Erste Eigenschaften

### Satz 10.2.1 / Satz 10.2.3

$\det A = \det A^\top$

Elementare Zeilenumformungen:

1. $B = P(r,s)A \implies \det B = -\det A$
2. $B = M(r,\lambda)A \implies \det B = \lambda \det A$
3. $B = S(r,s,\lambda)A \implies \det B = \det A$

### Theorem 10.2.5 / Korollar 10.2.7

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ \mathbb{0} & C \end{pmatrix}$$

mit $A, C$ quadratisch, dann ist $\det M = \det A \det B$.

$M$ eine obere Dreiecksmatrix, dann $\det M = m_{11} m_{22} \cdots m_{nn}$.

## 10.3 Determinanten und Invertierbarkeit

### Satz 10.3.2 / Korollar 10.3.3 / Korollar 10.3.4

$\det AB = \det A \det B$

$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

$B = C^{-1}AC \implies \det B = \det A$

### Definition 10.3.7: Kofaktormatrix / Adjunkte Matrix

Kofaktormatrix $C = (c_{ij})$ mit $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

Adjunkte Matrix $\operatorname{adj}(A) = C^\top$.

### Satz 10.3.11 / Lemma 10.3.12 / Theorem 10.3.13

$A \cdot \operatorname{adj}(A) = \det(A) \cdot \mathbb{1}_n$

$\operatorname{adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot \mathbb{1}_n$

$A^{-1} = \det(A)^{-1} \cdot \operatorname{adj}(A)$

## 10.4 Die Determinante eines Endomorphismus

### Definition 10.4.1: Determinante des Endomorphismus / Lemma 10.4.2

$T : V \to V$ mit Basen $B, C$, dann ist $\det T = \det[T]_B^B = \det[T]_C^C$.

### Satz 10.4.4

1. $\det(ST) = \det S \det T$
2. $T$ Isomorphismus $\iff \det T \neq 0 \implies \det(T^{-1}) = \det(T)^{-1}$
3. $\det(\mathrm{id}_V) = 1, \det(\mathbb{0}_V) = 0$

# 12 Eigenwerte und Eigenvektoren

## 12.1 Definitionen und Erste Eigenschaften

### Definition 12.1.1: Eigenwert / Eigenvektor

$T : V \to V$

1. $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert von $T$ wenn $\exists v \in V, v \neq 0_V : Tv = \lambda v$
2. $v \in V, v \neq 0_V$ ist ein Eigenvektor von $T$ zum Eigenwert $\lambda$ wenn $Tv = \lambda v$

$\sigma(T) := \{\lambda \text{ Eigenwert von } T\}$

### Korollar 12.1.5

Äquivalente Aussagen:

1. $\lambda \in \sigma(T)$

2. $\ker(T - \lambda \mathrm{id}) \neq \{0_V\}$
3. $T - \lambda \mathrm{id}$ ist kein Isomorphismus
4. $\det(T - \lambda \mathrm{id}) = 0$

# 12.2 Das Charakteristische Polynom

## Definition 12.2.1 / Definition 12.2.3: Charakteristisches Polynom

$\chi_A(x) = \det(A - x \cdot \mathbb{1}_n)$ ist das charakteristische Polynom von $A$.

$\chi_T(x) = \det([T]_B^B - x \cdot \mathbb{1}_n)$ ist das charakteristische Polynom von $T$.

## Theorem 12.2.5

$\lambda \in \sigma(T) \iff \chi_T(\lambda) = 0.$

$\sigma(T) = \{\lambda \in K \mid \chi_T(\lambda) = 0\}$

## Satz 12.2.9

$\chi_T(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \mathrm{Tr}(T) x^{n-1} + \cdots + \det(T)$

# 12.3 Diagonalisierung

## Satz 12.3.2 / Korollar 12.3.4

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ verschiedene Eigenwerte mit $v_i$ Eigenvektor zu $\lambda_i \implies v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig.

$\dim V = |\sigma(T)| \implies V$ hat eine Basis aus Eigenvektoren; $T$ ist diagonalisierbar.

## Definition 12.3.5: Diagonalisierbarkeit

$T : V \to V$ ist diagonalisierbar, wenn $V$ eine Basis aus Eigenvektoren von $T$ besitzt.

$A \in M_{n \times n}(K)$ ist diagonalisierbar, wenn $T_A$ diagonalisierbar ist.

# 12.4 Eigenräume

## Definition 12.4.1: Eigenraum / Lemma 12.4.2

Eigenraum von $\lambda$ ist $E_\lambda := \{v \in V \mid Tv = \lambda v\} = \ker(T - \lambda \mathrm{id}) \leq V$.

### Satz 12.4.8 / Korollar 12.4.9

$E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_k} = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}$

$T$ diagonalisierbar $\iff \dim V = \dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_k}$

## 12.5 Algebraische und Geometrische Vielfachheit

$K$ algebraisch abgeschlossen.

### Definition 12.5.2: Geometrische / Algebraische Vielfachheit

1. geometrische Vielfachheit: $g_\lambda = \dim E_\lambda$
2. algebraische Vielfachheit: $a_\lambda =$ Vielfachheit Nullstelle von $\chi_T(\lambda)$

### Satz 12.5.4 / Korollar 12.5.5 / Theorem 12.5.6

$g_\lambda \leq a_\lambda$

$T$ diagonalisierbar $\iff g_{\lambda_i} = a_{\lambda_i}, \forall 1 \leq i \leq n$

Äquivalente Aussagen:

1. $T$ diagonalisierbar
2. $g_\lambda = a_\lambda, \forall \lambda \in \sigma(T)$
3. $\chi_T(x) = \prod_{i=1}^k (\lambda_i - x)^{g_{\lambda_i}}$
4. $V = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}$

# 13 Das Minimale Polynom

## Definition und Erste Eigenschaften

### Definition 13.1.8: Minimales Polynom / Lemma 13.1.9 / Satz 13.1.10

Das minimale Polynom von $T$ ist das monische Polynom $m_T(x) \in K[x]$ kleinsten Grades mit $m_T(x) = 0$.

Das minimale Polynom ist wohldefiniert und eindeutig.

## Satz 13.1.14 / Korollar 13.1.15

$K$ algebraisch abgeschlossen, mit

$$C = \begin{pmatrix} A & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & B \end{pmatrix}$$

dann ist $m_C(x) = \operatorname{lcm}(m_A(x), m_B(x))$.

Wenn

$$C = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots \\ & & \ddots & \\ & & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

dann ist $m_C(x) = \operatorname{lcm}(m_{A_1}(x), \ldots, m_{A_k}(x))$.

# 13.2 Der Satz von Cayley-Hamilton

## Theorem 13.2.1: Cayley-Hamilton

$\chi_T(T) = 0$

## Korollar 13.2.2

$m_T(x) \mid \chi_T(x)$

## Lemma 13.2.4 / Satz 13.2.5

$T : V \to V, W \leq V$ mit $T(W) \subseteq W$ und $T' = T\,\big|_W$, dann gilt $\chi_{T'}(x) \mid \chi_T(x)$.

$T : V \to V, v \in V, W = \left\langle w, Tw, T^2w, \ldots \right\rangle \implies T(W) \subseteq W, T' = T\,\big|_W \implies \chi_{T'}(T')v =$

# 14 Die Jordan'sche Normalform einer Matrix

# 14.1 Definition und Theorem

## Definition: Jordanblock / Lemma 14.1.1

Ein Jordanblock hat die folgende Form:

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots \\ & & \ddots & \ddots & \\ & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ & & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot \mathbb{1}_n + N_n$$

mit einzigem Eigenwert $\lambda, g_\lambda = 1, a_\lambda = n, E_\lambda = \langle e_1 \rangle, m_{J_n(\lambda)}(x) = (x-\lambda)^n$.

## Theorem 14.1.2: Jordan'sche Normalform

$T : V \to V, \exists B$ Basis von $V$, sodass

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\alpha_1) & & & \\ & J_{n_2}(\alpha_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_k}(\alpha_k) \end{pmatrix}$$

eindeutig ist (abgesehen von der Vertauschung der Blöcke).

# 14.2 Eigenschaften der Jordan'sche Normalform

## Lemma 14.2.2

$$C = \begin{pmatrix} A & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & B \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(K), A \in M_{\ell\times\ell}(K)$$

mit $U = \langle e_1, \dots, e_\ell \rangle, W = \langle e_{\ell+1}, \dots, e_n \rangle, v = u + w \in V, v \neq 0_V, u \in U, w \in W$.
Dann gilt: $v$ ist Eigenvektor von $C$ zu $\lambda \in \sigma(C) \iff Au = \lambda u \wedge Bw = \lambda w$.
Zusätzlich: $E_\lambda(C) = E_\lambda(A) \oplus E_\lambda(B)$ und damit $g_\lambda(C) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B)$.

## Theorem 14.2.3

- $g_\lambda = \#$Jordanblöcke mit Eigenwert $\lambda$
- arithmetische Vielfachheit von $\lambda$ in $m_T(x) =$ Länge des grössten Jordanblocks mit Eigenwert $\lambda$
- $a_\lambda =$ kombinierte Länge aller Jordanblöcke mit Eigenwert $\lambda$

# 14.3 Verallgemeinerte Eigenräume

## Definition 14.3.1: Verallgemeinerter Eigenraum / Lemma 14.3.3

$\tilde{E}_\lambda := \bigcup_{j=1}^{\infty} \ker(T - \lambda \mathrm{id})^j = \ker(T - \lambda \mathrm{id})^n$

## Lemma 14.3.2

$T : V \to V, v \in V, v \neq 0_V, T^k v = 0_V$ aber $T^{k-1} v \neq 0_V \implies v, Tv, \ldots, T^{k-1} v$ sind linear unabhängig.

## Definition 14.3.4: Jordankette

$v \in \tilde{E}_\lambda, v \neq 0_V, k \geq 1$ minimal, sodass $(T - \lambda \mathrm{id})^k v = 0_V$. Dann ist $\{v, (T - \lambda \mathrm{id}) v, \ldots, (T - \lambda \mathrm{id})^{k-1} v\}$ die Jordankette von $v$.

## Lemma 14.3.8 / Satz 14.3.9 / Korollar 14.3.10

$T(\tilde{E}_\lambda) \subseteq \tilde{E}_\lambda$

$\{\lambda\} = \sigma(T \mid_{\tilde{E}_\lambda})$

$\exists m_\lambda \leq a_\lambda(T) : \chi_{T|_{\tilde{E}_\lambda}}(x) = (\lambda - x)^{m_\lambda}$

## Lemma 14.3.12

$\tilde{E}_{\lambda_1} + \cdots + \tilde{E}_{\lambda_k} = \tilde{E}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \tilde{E}_{\lambda_k}$

vgl. Satz 12.4.8 / Korollar 12.4.9

## Theorem 14.3.15 / Korollar 14.3.16

$T : V \to V \implies V = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(T)} \tilde{E}_\lambda$.

# 14.4 Beweis der Jordan'schen Normalform für Nilpotente Abbildungen

## Theorem 14.4.1 / Korollar 14.4.4

Für eine nilpotente Abbildung $N : V \to V$ gibt es eine Basis von $V$ bestehend aus Jordanketten.

Dies gilt auch für ein allgemeines $T : V \to V$, wo $\tilde{E}_\lambda$ eine Basis bestehend aus Jordanketten von $T \big|_{\tilde{E}_\lambda}$ hat.

---

# 14.5 Berechnung der Jordan'sche Normalform

## Satz 14.5.7

$C^{-1} J_n(\lambda) C$ in Jordan'sche Normalform $\iff$

$$C = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & x_1 \end{pmatrix}$$

---

# 15 Euklidische und Hermitesche Räume

# 15.1 Normierte Räume

## Definition 15.1.1: Norm

$K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, dann ist eine Norm auf $V$ Vektorraum $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \forall u, v \in V$ (Dreiecksungleichung)
- $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|, \forall \alpha \in K, v \in V$ ("Linearität")
- $\|v\| = 0 \implies v = 0_V$ (Nicht-Degeneriertheit)

## Definition 15.1.6: Einheitsvektor, Distanz / Bemerkung 15.1.7

1. $v$ heisst Einheitsvektor $\iff \|v\| = 1$
2. Distanz zwischen $v, w$ ist $d(v, w) := \|v - w\|$

Normalisierung von $v$ ist $\frac{1}{\|v\|} \cdot v$.

# 15.2 Innere Produkte

# Definition 15.2.1: Inneres Produkt für Euklidische Räume / Bemerkung 15.2.4

$K = \mathbb{R}$, dann ist ein inneres Produkt auf $V$ Vektorraum $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ mit

1. Linearität in der ersten Variablen:
   $\langle \alpha v_1 + v_2, w \rangle = \alpha \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle, \forall \alpha \in K, v_1, v_2, w \in V$
2. Linearität in der zweiten Variablen:
   $\langle v, \alpha w_1 + w_2 \rangle = \alpha \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle, \forall \alpha \in K, v, w_1, w_2 \in V$
3. Symmetrie: $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle, \forall v, w \in V$
4. Positivität: $\langle v, v \rangle > 0, \forall v \in V \setminus \{0_V\}$

Dann heisst $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklidischer Raum.

Standard-inneres Produkt: $\langle u, v \rangle = u^\top v = u^\top \mathbb{1}_n v$.

# Definition 15.2.6: Inneres Produkt für Hermitesche Räume / Bemerkung 15.2.8

$K = \mathbb{C}$, dann ist ein inneres Produkt auf $V$ Vektorraum $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ mit

1. Linearität in der ersten Variablen:
   $\langle \alpha v_1 + v_2, w \rangle = \alpha \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle, \forall \alpha \in K, v_1, v_2, w \in V$
2. Sesquilinearität in der zweiten Variablen:
   $\langle v, \alpha w_1 + w_2 \rangle = \overline{\alpha} \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle, \forall \alpha \in K, v, w_1, w_2 \in V$
3. Hermitesche Eigenschaft: $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}, \forall v, w \in V$
4. Positivität: $\langle v, v \rangle > 0, \forall v \in V \setminus \{0_V\}$

Dann heisst $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ hermitescher Raum.

Standard-inneres Produkt: $\langle u, v \rangle = u^\top \overline{v} = u^\top \mathbb{1}_n \overline{v}$.

# Lemma 15.2.9

$V$ innerer Produktraum, dann gilt:

1. $\langle 0_V, v \rangle = \langle v, 0_V \rangle = 0, \forall v \in V$
2. $\langle v, w \rangle = 0, \forall v \in V \implies w = 0_V$
3. $\langle v, w_1 \rangle = \langle v, w_2 \rangle, \forall v \in V \implies w_1 = w_2$

## Satz 15.2.10

$V$ innerer Produktraum, dann ist $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$ eine Norm.

## Lemma 15.2.11: Cauchy-Schwartz-Ungleichung

$V$ innerer Produktraum, dann ist $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|, \forall u, v \in V$ mit Gleichheit $\iff u, v$ linear abhängig.

## Lemma 15.2.12

$V$ euklidisch, dann ist $\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2), \forall u, v \in V$.

## Definition 15.2.14: Orthogonal / Orthonormal

1. $v \perp w \iff \langle v, w\rangle = 0$
2. $S \subseteq V$ ist ein orthogonales System $\iff u \perp v, \forall u, v \in S$
3. orthogonales System $S \subseteq V$ ist orthonormal $\iff \|v\| = 1, \forall v \in S$

## Satz 15.2.16: Satz des Pythagoras

$V$ innerer Produktraum, $u \perp v \in V \implies \|u+v\| = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

## Definition 15.2.17: Projektion / Bemerkung 15.2.18

$v \in V, v \neq 0_V$, dann ist die Projektion von $u$ auf $v$ definiert als $\text{proj}_v(u) := \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle} \cdot v$.

$u \perp v \neq 0_V \iff \text{proj}_v(u) = 0_V$

## Lemma 15.2.20

$v \neq 0_V \implies u - \text{proj}_v(u) \perp v$

# 15.3 Konstruktion innerer Produkte

## Definition 15.3.1

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), \langle u, v\rangle_A := u^\top Av$

## Definition 15.3.2: Symmetrisch

$A \in M_{n\times n}(K)$ ist symmetrisch $\iff A = A^\top \iff a_{ij} = a_{ji}$.

## Lemma 15.3.3

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch $\implies \langle u,v\rangle_A = \langle v,u\rangle_A, \forall u,v \in \mathbb{R}^n$.

## Definition 15.3.5: Positiv Definit

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch ist positiv definit
$\iff \langle v,v\rangle_A = v^\top A v > 0, \forall v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$.

## Satz 15.3.7

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, dann ist $\langle \cdot,\cdot\rangle_A$ ein inneres Produkt $\iff$ $A$ positiv definit.

## Definition 15.3.9

$B \in M_{n\times n}(\mathbb{C}), \langle u,v\rangle_B = u^\top B\overline{v}$

## Definition 15.3.10: Adjungierte, Hermitesch

$B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$

1. adjungierte Matrix von $B$ ist $B^* = \overline{B}^\top$
2. $B$ ist hermitesch $\iff B = B^* \iff b_{ij} = \overline{b_{ji}}$

## Definition 15.3.13: Positiv Definit

$B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ hermitesch ist positiv definit $\iff \langle v,v\rangle_B = v^\top B\overline{v} > 0, \forall v \in \mathbb{C}^n, v \neq 0$
.

## Satz 15.3.15

$B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, dann ist $\langle \cdot,\cdot\rangle_B$ ein inneres Produkt $\iff$ $B$ positiv definit.

# 15.4 Gram-Schmidt-Orthogonalisierung

## Satz 15.4.1

1. $S \subseteq V$ orthogonales System mit $0_V \notin S \implies S$ linear unabhängig.
2. $\{v_1,\dots,v_n\}$ orthogonales System mit $v_i \neq 0_V, \forall 1 \leq i \leq n$ und
   $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \implies a_i = \frac{\langle v,v_i\rangle}{\langle v_i,v_i\rangle}$.

### Theorem 15.4.4: Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren

$v_1, \dots, v_n$ Basis von $V$, dann ist $w_1, \dots, w_n$ mit $w_1 = v_1$ und $w_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \text{proj}_{w_i} v_j$ eine orthogonale Basis von $V$.

Für Orthonormalisierung kann man folgende Formel anwenden:
$v_1, \dots, v_n$ Basis von $V$, dann ist $w_1, \dots, w_n$ mit $w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ und $w'_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \langle v_j, w_i \rangle w_i, w_j = \frac{w'_j}{\|w'_j\|}$ eine orthonormale Basis von $V$.

## 15.5 Das orthogonale Komplement

### Definition 15.5.1: Orthogonales Komplement / Bemerkung 15.5.2

$\varnothing \neq S \subseteq V$, dann ist das orthogonale Komplement von $S$ definiert als $S^\perp := \{v \in V \mid \langle v, s \rangle = 0, \forall s \in S\}$.

$S = \{v\} \implies v^\perp := \{v\}^\perp$

$0_V^\perp = V$ und $V^\perp = \{0_V\}$

### Lemma 15.5.3

$\varnothing \neq S \subseteq V$

1. $S^\perp \leq V$
2. $S \cap S^\perp \in \{\varnothing, \{0_V\}\}$
3. $S \subseteq T \subseteq V \implies T^\perp \subseteq S^\perp$
4. $LH(S)^\perp = S^\perp$
5. $S \subseteq (S^\perp)^\perp$

### Theorem 15.5.4

$U \leq V \implies V = U \oplus U^\perp$

### Definition 15.5.9: Orthogonale Projektion / Bemerkung 15.5.10

$U \leq V, v \in V$ mit $v = u + w, u \in U, w \in U^\perp$. Definiere die orthogonale Projektion von $v$ auf $U$ als $\operatorname{pr}_U(v) = u$.

$\forall u \in U : \operatorname{pr}_U(u) = u$

## Lemma 15.5.11

1. $\operatorname{pr}_U$ ist linear
2. $\ker(\operatorname{pr}_U) = U^\perp \wedge \operatorname{im}(\operatorname{pr}_U) = U$
3. $v - \operatorname{pr}_U(v) \in U^\perp, \forall v \in V$

## Satz 15.5.12 / Korollar 15.5.13

$U \leq V \implies U = (U^\perp)^\perp$

$U \leq V \implies \dim V = \dim U + \dim U^\perp$

# 15.6 $QR$-Zerlegung

## Definition 15.6.1: Orthogonale und Unitäre Matrizen / Lemma 15.6.3 / Bemerkung 15.6.4 / Satz 15.6.5

1. $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ist orthogonal $\iff$ Spaltenvektoren bilden eine orthonormale Basis $\iff A^{-1} = A^\top$. $O(n) := \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid A \text{ orthogonal}\}$
2. $B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ ist unitär $\iff$ Spaltenvektoren bilden eine orthonormale Basis $\iff B^{-1} = B^*$. $U(n) := \{B \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid B \text{ unitär}\}$

$A \in O(n) \iff A^\top \in O(n)$ und $B \in U(n) \iff B^* \in U(n)$

$O(n)$ ist eine Untergruppe von $GL_n(\mathbb{R})$ und $U(n)$ ist eine Untergruppe von $GL_n(\mathbb{C})$.

## Theorem 15.6.6

1. $A \in GL_n(\mathbb{R}) \implies \exists Q \in O(n), R \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ obere Dreiecksmatrix sodass $A = QR$.
2. $B \in GL_n(\mathbb{C}) \implies \exists Q \in U(n), R \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ obere Dreiecksmatrix sodass $B = QR$.

Wir finden $Q = (w_1, \ldots, w_n)$ nach Gram-Schmidt-Orthogonalisierung *und Normalisierung* und

$$R = \begin{pmatrix} \langle v_1, w_1 \rangle & \langle v_2, w_1 \rangle & \cdots & \langle v_n, w_1 \rangle \\ 0 & \langle v_2, w_2 \rangle & \cdots & \langle v_n, w_2 \rangle \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \langle v_n, w_n \rangle \end{pmatrix}$$

### Theorem 15.6.9

$A \in M_{m \times n}(K), r = \text{rk}(A) \implies \exists Q \in U(n), R = \begin{pmatrix} C & \star \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C \in M_{r \times r}(K)$ obere Dreiecksmatrix, sodass $A = QR$.

## 15.7 Dualräume von Inneren Produkträumen

### Definition 15.7.1: $\varphi$-Abbildung / Lemma 15.7.2

$u \in V$, definiere $\varphi_u(v) := \langle v, u \rangle$.

$\varphi_u \in V^*, \forall u \in V$

### Theorem 15.7.3: Darstellungssatz von Riesz / Bemerkung 15.7.4

$\varphi \in V^* \implies \exists! u \in V : \varphi = \varphi_u$

$\Phi : V \to V^*, u \mapsto \varphi_u$ ist bijektiv.

### Satz 15.7.6

$U \leq V \implies \Phi(U^\perp) \leq V^*$ entspricht dem Annihilator.

## 15.8 Die adjungierte Abbildung

$T : V \to W$ linear

### Definition 15.8.1: Adjungierte Abbildung / Satz 15.8.3 / Bemerkung 15.8.4

Die adjungierte Abbildung von $T$ ist $T^* : W \to V$ sodass $\langle Tv, w \rangle_W = \langle v, T^* w \rangle_V, \forall v \in V, w \in W$.

$T^*$ ist wohldefiniert und linear.

- $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$
- $(T^*)^* = T$

## Satz 15.8.6

$T^*_{\mathrm{dual}} : W^* \to V^*$ die duale Abbildung, dann ist $T^* = \Phi_V^{-1} \circ T^*_{\mathrm{dual}} \circ \Phi_W$.

## Bemerkung 15.8.7

Identifikationen:

- $V^*$ mit $V$
- $U^\perp$ Annihilator mit $U^\perp$ orthogonalem Komplement
- $T^* : W^* \to V^*$ mit $T^* : W \to V$

## Lemma 15.8.8 / Lemma 15.8.9

$S, T : V \to W, R : W \to U$

1. $(S+T)^* = S^* + T^*$
2. $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} \cdot T^*, \forall \lambda \in K$
3. $(T^*)^* = T$
4. $(RT)^* = T^* R^*$
5. $\ker(T^*) = \mathrm{im}(T)^\perp$
6. $\ker(T) = \mathrm{im}(T^*)^\perp$
7. $\mathrm{im}(T^*) = \ker(T)^\perp$
8. $\mathrm{im}(T) = \ker(T^*)^\perp$

# 15.9 Die Abbildungsmatrix der adjungierten Abbildung

## Lemma 15.9.1 / Satz 15.9.2 / Korollar 15.9.3

$T : V \to W$ mit orthonormalen Basen $B = (v_1, \ldots, v_n), C = (w_1, \ldots, w_m)$ und $A = (a_{ij}) = [T]^B_C$, dann ist $a_{ji} = \langle T v_i, w_j \rangle_W$.

$[T^*]^C_B = ([T]^B_C)^*$

$A \in M_{n \times m}(K) \implies (T_A)^* = T_{A^*}$

# 16 Spektraltheorie

## 16.1 Normale Endomorphismen

### Definition 16.1.1: Orthogonal Diagonalisierbar

$T : V \to V$ ist orthogonal diagonalisierbar $\iff$ $V$ hat eine orthonormale Basis aus Eigenvektoren.

### Lemma 16.1.3

$T$ orthogonal diagonalisierbar $\implies$ $TT^* = T^*T$.

### Definition 16.1.5: Normale Abbildungen / Bemerkung 16.1.6 / Satz 16.1.7

$T : V \to V$ ist normal $\iff$ $TT^* = T^*T$.

$A \in M_{n\times n}(K)$ ist normal $\iff$ $AA^* = A^*A$.

1. $A \in O(n) \implies A$ normal und $B \in U(n) \implies B$ normal
2. $T$ orthogonal diagonalisierbar $\implies$ $T$ normal (aber nicht umgekehrt!)
3. $T : V \to V$ normal, $B$ orthonormale Basis $\implies$ $[T]_B^B$ normal.
4. $A \in M_{n\times n}(K)$ normal, Standard-inneres Produkt $\implies$ $T_A : K^n \to K^n$ normal.

### Lemma 16.1.9

$T : V \to V$ normal

1. $\|Tv\| = \|T^*v\|, \forall v \in V$
2. $T - \lambda \mathrm{id}$ normal $\forall \lambda \in K$
3. $v$ Eigenvektor von $T$ zu $\lambda$ $\implies$ $v$ Eigenvektor von $T^*$ zu $\overline{\lambda}$
4. $v_1, v_2$ Eigenvektoren von $T$ zu verschiedenen Eigenwerten $\implies$ $v_1 \perp v_2$

### Theorem 16.1.10: Spektralsatz über $\mathbb{C}$ / Korollar 16.1.12 / Korollar 16.1.13

$T : V \to V$ über $\mathbb{C}$ orthogonal diagonalisierbar $\iff$ $T$ normal.

$T : V \to V$ über $\mathbb{R}$, wenn $V$ eine Jordanbasis hat $\implies$ $T$ orthogonal diagonalisierbar.

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ normal $\implies$ $\exists U \in U(n) : U^{-1}AU$ diagonal.

## 16.2 Spektraltheorie über $\mathbb{R}$

### Lemma 16.2.1

$T : V \to V$ über $\mathbb{R}$ orthogonal diagonalisierbar $\implies$ $T^* = T$.

### Definition 16.2.2: Selbstadjungiert / Satz 16.2.3 / Bemerkung 16.2.4

$T : V \to V$ heisst selbstadjungiert $\iff$ $T = T^*$.

$A \in M_{n\times n}(K)$ heisst selbstadjungiert $\iff$ $A = A^*$.

1. $T : V \to V$ selbstadjungiert, $B$ orthonormale Basis $\implies$ $[T]_B^B$ selbstadjungiert.
2. $A \in M_{n\times n}(K)$ selbstadjungiert, Standard-inneres Produkt $\implies$ $T_A$ selbstadjungiert.

$T$ selbstadjungiert $\implies$ $T$ normal.

### Satz 16.2.6

$T : V \to V$ selbstadjungiert

1. $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$
2. $\chi_T(x)$ zerfällt in Linearfaktoren

### Theorem 16.2.7 / Korollar 16.2.8

$T : V \to V$ über $\mathbb{R}$ orthogonal diagonalisierbar $\iff$ $T$ selbstadjungiert.

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ selbstadjungiert / symmetrisch $\implies$ $\exists O \in O(n) : O^\top AO$ diagonal.

# 18 Isometrien

## 18.1 Definition und erste Eigenschaften

## Definition 18.1.1: Isometrie / Bemerkung 18.1.3 / Lemma 18.1.4

$T : V \to W$ heisst Isometrie $\iff \|Tv\|_W = \|v\|_V$.

Isometrien sind injektiv.

$T : V \to W$ ist eine Isometrie $\iff \langle Tv_1, Tv_2 \rangle_W = \langle v_1, v_2 \rangle_V, \forall v_1, v_2 \in V$.

## Satz 18.1.5 / Satz 18.1.6 / Beachte 18.7.1

$T : V \to V$ linear. Äquivalente Aussagen:

1. $T$ ist eine Isometrie
2. $\forall$ orthonormale Basis $B$ ist $TB$ auch eine orthonormale Basis
3. $TT^* = \mathrm{id} = T^*T$
4. $T^*$ ist eine Isometrie
5. $B$ orthonormale Basis $\implies [T]_B^B \in U(n)$
6. $A \in U(n) \implies T_A$ ist eine Isometrie bezüglich des Standard-inneren Produkts
7. $A \in O(n) \implies \det A = \pm 1$
8. $B \in U(n) \implies |\det B| = 1$

## Lemma 18.1.8: Spezielle Orthogonale und Unitäre Matrizen

Die Untermenge der speziellen orthogonalen Matrizen $SO(n) := \{A \in O(n) \mid \det A = 1\} \subseteq O(n)$ ist eine Untergruppe von $O(n)$.

Die Untermenge der speziellen unitären Matrizen $SU(n) := \{B \in U(n) \mid \det B = 1\} \subseteq U(n)$ ist eine Untergruppe von $U(n)$.

---

# 18.2 Klassifikation der Elemente in $O(2)$ und $SO(3)$

## Lemma 18.2.1

$A \in O(n) \implies \sigma(A) \subseteq \{\pm 1\}$

### Lemma 18.2.2 / Satz 18.2.3 / Korollar 18.2.4

$v \in \mathbb{R}^2, \|v\| = 1 \implies \exists \theta \in [0, 2\pi) : v = (\cos\theta, \sin\theta)$

$A \in O(2)$

1. $\det A = 1 \implies \exists \theta \in [0, 2\pi) : A = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (Rotation gegen den Uhrzeigersinn um $\theta$)
2. $\det A = -1 \implies \exists$ Basis $B = (v_1, v_2) : [T_A]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (Reflexion in $LH(v_1)$ )

$T : V \to V$ über $\mathbb{R}$ mit $\dim V = 2, \det T = -1 \implies \exists$ orthonormale Basis $B$ sodass

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

### Satz 18.2.5

$A \in SO(3) \implies 1 \in \sigma(A), \exists B = (v_1, v_2, v_3)$ orthonormale Basis und $\theta \in [0, 2\pi)$ sodass

$$[T_A]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

1. $-1 \in \sigma(A) \implies \theta = \pi$
2. $-1 \notin \sigma(A) \implies \theta \neq \pi$

---

# 19 Tensorprodukte von Vektorräumen

## 19.1 Die äussere direkte Summe zweier Vektorräume

### Definition 19.1.1: Äussere direkte Summe / Bemerkung 19.1.3 / Lemma 19.1.4

$V \oplus W$ mit Elementen $(v, w) \in V \oplus W, v \in V, w \in W$ und $\alpha(v_1, w_1) + (v_2, w_2) := (\alpha v_1 + v_2, \alpha w_1 + w_2)$.

Damit ist konkret $V \oplus W \cong V \times W$ und auch $V \oplus V \cong V \times V \cong V^2$.

$\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W$

$V, W \leq V \oplus W$ mit kanonischen Injektionen

# 19.2 Komplexifizierung

## Definition 19.2.2: Komplexifizierung / Bemerkung 19.2.3 / Beispiel 19.2.5

Komplexifizierung $V_\mathbb{C}$ über $\mathbb{C}$ von $V$ über $\mathbb{R}$ ist $V \oplus V$ mit
$(a+bi)(u,v) := (au - bv, bu + av)$.

1. $i(u,v) = (-v, u)$
2. $V \leq V_\mathbb{C}$ mit kanonischer Injektion $\iota : v \mapsto (v, 0_V)$

$(\mathbb{R}^n)_\mathbb{C} \cong \mathbb{C}^n$

## Satz 19.2.3 / Bemerkung 19.2.7

$V = \{0\} \implies V_\mathbb{C} = \{0\}$ und $V \neq \{0\}$ mit $\mathbb{R}$-Basis
$B = \{v_1, \dots, v_n\} \implies B_\mathbb{C} = \{(v_1, 0_V), \dots, (v_n, 0_V)\}$ ist eine $\mathbb{C}$-Basis von $V_\mathbb{C}$ mit
$\dim_\mathbb{C} V_\mathbb{C} = \dim_\mathbb{R} V$.

$B_\mathbb{R} = \{(v_1, 0_V), \dots, (v_n, 0_V), (0_V, v_1), \dots, (0_V, v_n)\}$ ist eine $\mathbb{R}$-Basis von $V_\mathbb{C}$ mit
$\dim_\mathbb{R} V_\mathbb{C} = 2 \dim_\mathbb{C} V_\mathbb{C}$.

## Theorem 19.2.8

$T : V \to W \implies \exists! T_\mathbb{C} : V_\mathbb{C} \to W_\mathbb{C} : \imath_W \circ T = T_\mathbb{C} \circ \imath_V$

## Lemma 19.2.9

$[T_\mathbb{C}]_{C_\mathbb{C}}^{B_\mathbb{C}} = [T]_C^B$ und $\chi_T(x) = \chi_{T_\mathbb{C}}(x)$

# 19.3 Vektorräume über einer freien Menge

## Definition 19.3.1: Vektorraum über Menge / Bemerkung 19.3.2

$S$ Menge, $K$ Körper. Der von $S$ erzeugte $K$-Vektorraum $K(S)$ ist definiert mit:

- Elemente von $K(S)$ sind formale Summen: $v = \sum_{s \in S} \alpha_s \cdot s$
- Addition: $\sum_{s \in S} \alpha_s \cdot s + \sum_{s \in S} \beta_s \cdot s = \sum_{s \in S} (\alpha_s + \beta_s) \cdot s$
- Skalarmultiplikation: $\lambda \left(\sum_{s \in S} \alpha_s \cdot s\right) = \sum_{s \in S} (\lambda \alpha_s) \cdot s$

$|S| < \infty \implies \dim K(S) = |S|$, $S$ ist eine Basis von $K(S)$.

# 19.4 Konstruktion des Tensorproduktes

## Definition 19.4.1: Tensorprodukt / Bemerkung 19.4.2 / Bemerkung 19.4.3 / Beispiele 19.4.4

$V, W$ endlich-dimensional über $K$ mit Basen $v_1, \ldots, v_n$ und $w_1, \ldots, w_m$. Wir definieren $S := \{v_i \otimes w_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ und das Tensorprodukt $V \otimes_K W := K(S)$. Elemente: $\sum_{i,j} a_{ij} \cdot v_i \otimes w_j, a_{ij} \in K$.

$\dim(V \otimes W) = \dim V \dim W$

$v \otimes w$ heisst reiner Tensor.

1. $K \otimes K \cong K$ mit Basis $1 \otimes 1$
2. $V \otimes K \cong V$
3. $V \otimes \{0\} \cong \{0\}$

## Satz 19.4.7 / Satz 19.4.9

$U, V, W$ Vektorräume, $\Phi : V \times W \to U$ bilinear $\implies \exists! \phi : V \otimes W \to U$ linear, sodass $\phi \circ \otimes = \Phi$.

Definition 19.4.1 Tensorprodukt / Bemerkung 19.4.2 / Bemerkung 19.4.3 / Beispiele 19.4.4 ist unabhängig von der Wahl der Basen.

## Lemma 19.4.11

1. $U \otimes (V \otimes W) \cong (U \otimes V) \otimes W$
2. $U \otimes (V \oplus W) \cong (U \otimes V) \oplus (U \otimes W)$

## Satz 19.4.12 / Lemma 19.4.13

$T : V \to V', S : W \to W' \implies \exists! T \otimes S : V \otimes W \to V' \otimes W'$ sodass $(T \otimes S)(v \otimes w) = Tv \otimes Sw$.

$T : V \to V, S : W \to W \implies \mathrm{Tr}(T \otimes S) = \mathrm{Tr}(T) \cdot \mathrm{Tr}(S)$

# 19.5 Komplexifizierung revisited

## Satz 19.5.1

$\gamma_V : V_{\mathbb{C}} \to V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, (u, v) \mapsto u \otimes 1 + v \otimes i$ ist ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen.

## Definition 19.5.3: $\mathbb{C}$-Skalarmultiplikation auf $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ / Lemma 19.5.5

$\beta \cdot (v \otimes \alpha) := v \otimes \beta\alpha$

$\dim_{\mathbb{C}} V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \dim_{\mathbb{R}} V$

## Satz 19.5.6

$\gamma_V$ aus Satz 19.5.1 ist ein Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen.

# 19.6 Tensorprodukte linearer Abbildungen

## Satz 19.6.1 / Lemma 19.6.3

Satz 19.4.12 / Lemma 19.4.13

## Lemma 19.6.4 / Satz 19.6.5

$(S_1 \otimes S_2)(T_1 \otimes T_2) = (S_1 T_1) \otimes (S_2 T_2)$

$(T \otimes S)^{-1} = T^{-1} \otimes S^{-1}$

## Theorem 19.6.7

$T : V \to V, S : W \to W \implies \det(T \otimes S) = \det(T)^{\dim W} \cdot \dim(S)^{\dim V}$

# 19.7 Tensorprodukte und duale Abbildungen

## Theorem 19.7.1 / Satz 19.7.3 / Korollar 19.7.5

$\exists! \chi : U^* \otimes V^* \to (U \otimes V)^*$ sodass $\chi(f \otimes g)(u \otimes v) = f(u)g(v)$

$\exists!\Theta : U^* \otimes V \to \mathrm{Hom}(U, V)$ sodass $\Theta(f \otimes v)(u) = f(u)v$

$\exists$ kanonischer Isomorphismus $\mathrm{End}(V) \cong V \otimes V^*$

## 19.9 Das symmetrische und alternierende Produkt

### Bemerkung 19.9.1

$V^{\otimes r} := \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{r \text{ mal}}$

$\sigma \in S_r, v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_r \in V^{\otimes r} : \sigma(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_r) := v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(r)}$

### Definition 19.9.2: Symmetrisches Produkt / Beachte 19.9.4

$\mathrm{Sym}^r V := \{v \in V^{\otimes r} \mid \sigma(v) = v, \forall \sigma \in S_r\} \leq V^{\otimes r}$

### Definition 19.9.6: Symmetrisches Produkt als Quotient / Satz 19.9.7

$U = LH\{v - \sigma(v) \mid v \in V^{\otimes r}\} \leq V^{\otimes r}, S^r V := V^{\otimes r}/U$

$\mathrm{Sym}^r V \cong S^r V$

### Theorem 19.9.10

$\dim V = n \implies \dim \mathrm{Sym}^r V = \binom{n+r-1}{r}$

### Definition 19.9.12: Alternierendes Produkt

$\mathrm{Alt}^r V := \{v \in V^{\otimes r} \mid \sigma(v) = \mathrm{sgn}(\sigma)v, \forall \sigma \in S_r\}$

### Satz 19.9.14

$V \otimes V \cong \mathrm{Sym}^2 V \oplus \mathrm{Alt}^2 V$

### Definition 19.9.15: Alternierendes Produkt als Quotient / Notation 19.9.17 / Lemma 19.9.18 / Satz 19.9.19

$U = LH\{v - \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma(v) \mid v \in V^{\otimes r}\} \leq V^{\otimes r}, \wedge^r V := V^{\otimes r}/U$

$\wedge : V^{\otimes r} \to \wedge^r V$ als natürliche Projektionsabbildung mit $\wedge(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$.

$\wedge$ ist $r$-linear und alternierend.

$\mathrm{Alt}^r V \cong \wedge^r V$

# Theorem 19.9.20

$\dim \mathrm{Alt}^r V = \binom{n}{r}$

# Korollar 19.9.22

- $r > \dim V \implies \wedge^r V = \{0\}$
- $\dim \wedge^n V = 1$ mit $v_1, \ldots, v_n$ Basis von $V \implies v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ Basis von $\wedge^n V$

# Theorem 19.9.24

$v_1, \ldots, v_n$ Basis von $V, A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(K)$ mit $w_j := \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i \implies w_1 \wedge \cdots \wedge w_n = \det A \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$.