Lineare Algebra II: Übungsstunde 12

Florian Frauenfelder
https://florian-frauenfelder.ch/ta/linalg/

19.05.2025

1 Quiz 24: Lösungsvorschlag

1.1 Aufgabe 24.1

Wir wissen: $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ und $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, womit aus der Dimensionsformel des Tensorproduktes folgt:

$$\boxed{\dim_{\mathbb{R}}(V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = 2n} = \dim_{\mathbb{R}} V \cdot \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \tag{1}$$

1.2 Aufgabe 24.2

Wir betrachten $S_2 = \{\mathrm{id}, (21)\}$, womit wir also eine Basis von $\mathrm{Sym}^2 V$ finden wollen, die invariant unter Vertauschung der Elemente in reinen Tensoren ist. Mit einer Basis von $V \otimes V : \{v_1 := e_1 \otimes e_1, v_2 := e_1 \otimes e_2, v_3 := e_2 \otimes e_1, v_4 := e_2 \otimes e_2\}$ sehen wir direkt, dass $e_1 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2$ sicher in der Basis sein müssen. Mit der Dimensionsformel

$$\dim \mathrm{Sym}^r V = \binom{\dim V + r - 1}{r} = \binom{3}{2} = 3 \tag{2}$$

wissen wir auch, dass wir ein weiteres Basiselement suchen. Mit Aufstellen des Gleichungssystems $av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4 = av_1 + cv_2 + bv_3 + dv_4$ sehen wir, dass für dieses Element $b = c$ gilt, also beispielsweise $e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$ ein Kandidat ist. Damit haben wir eine gesamte Basis gefunden:

$$\boxed{\{e_1 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2, e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1\}}. \tag{3}$$

2 Feedback Serie 24

3. Vorsicht: Aus der Vorlesung ist $\otimes$ nur als bilineare Funktion definiert $V \times W \to V \otimes W$ definiert. Die Beweise hier brauchen mehrere Schritte.

3 Theorie-Recap letzte Woche

Behandelte Themen: Tensorprodukt linearer Abbildungen, (Darstellung von Tensoren,) symmetrisches Produkt.

3.1 Zusätzliches Material

Ein Tensorprodukt zweier Matrizen kann man einerseits, wie in der Vorlesung gesehen, als grosse Matrix schreiben, oder aber als «vierdimensionalen Vektor» oder Tensor 4. Stufe: Seien $A = (A^i{}_j), B = (B^k{}_\ell)$ zwei Matrizen, dann können wir das Tensorprodukt $A \otimes B$ folgendermassen schreiben:

$$A \otimes B = ((A \otimes B)^{i\,k}_{\,j\,\ell}) = A^i{}_j \cdot B^k{}_\ell. \tag{4}$$

3.1.1 Darstellung von Tensoren

Sogenannte (p, q)-Tensoren sind vor allem in der Relativitätstheorie und Differentialgeometrie wichtig. Betrachten wir ein Beispiel aus der speziellen Relativitätstheorie: Wir bewegen uns im Minkowskiraum $\mathbb{R}^4$ und betrachten ein $x \in \mathbb{R}^4$:

$$x^\mu \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{5}$$

wobei konventionell griechische Indizes $\mu, \nu, \ldots$ für alle vier Komponenten und lateinische Indizes $i, j, \ldots$ für die Ortskomponenten $1, 2, 3$ benutzt werden. Dieser Vektor wird häufig als kontravariant bezeichnet.

Um die kovariante Darstellung mit Index unten zu erhalten, benutzen wir die Einstein'sche Summenkonvention, die über mehrfach (doppelt) auftretende Indizes summiert, die sowohl oben als auch unten stehen:

$$x_\mu \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix} = g_{\mu\nu} x^\nu \tag{6}$$

Hier benutzen wir den sogenannten metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$, der je nach Konvention verschieden aussieht, wobei die häufigste

$$g_{00} = 1,\ g_{ii} = -1 \implies g_{\mu\nu} \equiv \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1) \tag{7}$$

ist.

Damit haben wir bereits Tensoren ersten (x^μ) und zweiten ($g_{\mu\nu}$) Ranges gesehen.

4 Aufgaben

Aufgaben mit HSxx *oder* FSxx *sind aus der Prüfungssammlung des VMP entnommen:* `https://exams.vmp.ethz.ch/category/LineareAlgebraIII`

Besprochene Aufgaben:

- (HS02: 7.4)
- HS03: 7viii

Tipps zur Serie 25 auf der nächsten Seite!

5 Tipps zur Serie 25

Versuche zuerst 2, 6, (4) zu lösen.

1. Beweis von Satz 16.7.3. Definiere eine Abbildung $V^* \times W \to \mathrm{Hom}(V, W)$ und benutze die universelle Eigenschaft.

2. Explizit durchrechnen mit $b_i = m_{ki} b'_k$. Indexnotation macht's einfacher.

3. Definiere eine passende Abbildung (schreibaufwändig, 3 verschachtelte Abbildungen) und überprüfe deren Eigenschaften.

4. a) Überprüfe die notwendigen Eigenschaften, vor allem die Bilinearität.
   b) Überprüfe mit dem Skalarprodukt aus (a).
   c) Überprüfe mit dem Skalarprodukt aus (a).

5. a) Explizite Berechnung mit $(f \otimes \mathrm{id}_L)(x \cdot (v \otimes y))$, um L-Linearität zu zeigen.
   b) Aufwändig: Wähle Basen von $\ker f$ und einem Komplement U, um $f|_U$ bijektiv zu betrachten. Überprüfe dessen Eigenschaften, um die Aussage zu zeigen.
   c) Ähnlich wie (b).
   d) Benutze (c).

6. Im Moment noch schwierig: Warte die nächste Vorlesung ab, dann wird der Beweis deutlich einfacher. Idee: Betrachte eine Basis von $\bigwedge^r V$.