Lineare Algebra II: Übungsstunde 10

Florian Frauenfelder
https://florian-frauenfelder.ch/ta/linalg/

05.05.2025

1 Quiz 22: Lösungsvorschlag

1.1 Aufgabe 22.1

Beweis. A heisst selbstadjungiert $\iff A = A^*$; A heisst normal $\iff AA^* = A^*A$. Daraus folgt direkt:

$$A = A^* \implies AA^* = A^2 = A^*A = (A^*)^2. \tag{1}$$

□

1.2 Aufgabe 22.2

Verlangt: $B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, sodass $BB^* = B^*B$, aber nicht $B = B^*$. Einige Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & \pm i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & i \\ i & i \end{pmatrix} \tag{2}$$

2 Feedback Serie 21, 22

Kommt später.

3 Theorie-Recap letzte Woche

Behandelte Themen: Spektralsatz, Isometrien, (spezielle) orthogonale und unitäre Matrizen, Singulärwertzerlegung.

3.1 Zusätzliches Material

Zwei Bemerkungen zum Spektralsatz: Das ist eines der wichtigsten Ergebnisse (wenn nicht sogar *das* wichtigste Ergebnis) aus der Linearen Algebra. Wir haben hier zwei Bereiche vereint, die zuerst scheinbar nichts miteinander zu tun haben: einerseits die

Eigenwerte (eine Eigenschaft der Abbildung selbst) und andererseits die Adjungierte (die aus dem Skalarprodukt entsteht, was eine Eigenschaft des Raumes ist).

Der Spektralsatz findet überall in den Naturwissenschaften sehr wichtige Anwendungen. In der Quantenmechanik beispielsweise werden dank ihm messbare Grössen (die durch selbstadjungierte Operatoren beschrieben werden) mit ihren möglichen Messwerten (die aus den Eigenwerten der Operatoren berechnet werden) verknüpft.

4 Aufgaben

Aufgaben mit HSxx *oder* FSxx *sind aus der Prüfungssammlung des VMP entnommen:* `https://exams.vmp.ethz.ch/category/LineareAlgebraIII`

Besprochene Aufgaben:

- FS02: 7.6
- HS03: 7.vi

Weitere Aufgaben:

- FS01: 6 ($O(n)$)

Tipps zur Serie 23 auf der nächsten Seite!

5 Tipps zur Serie 23

Versuche zuerst 1, 4, 5, 6 zu lösen und schau dir 7 an.

1. b) $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr}[L_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ für eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$.
2. $\operatorname{Tr} f = \operatorname{Tr}[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ für eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$.
3. Konstruiere geeignete Orthonormalbasen von $\mathbb{R}^3$ «aus» E_1, E_2 und betrachte deren (orthogonale) Matrizen und $E_0 = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$ als «Hilfsraum».
4. Was können wir über $\chi_T(x)$ sagen?
5. $\Longrightarrow$: Betrachte $f^* f v, w := \frac{1}{\sigma} f v$. $\Longleftarrow$: Benutze die Definition von Singulärwert.
6. Berechne A^*A, wende die Definitionen an. Finde Eigenvektoren von A^*A für R^* und löse $AR^* = QD$.
7. Für Physiker: Ausführlicher in Physik II, Allgemeine Mechanik, Elektrodynamik, MMP II, ...
   a) Betrachte ein $v \in \ker F$ mit F einer Isometrie.
   b) Explizite Rechnungen: eher uninteressant, aber trotzdem wichtig.
   c) *Sehr* (!) aufwändig:
      i. $\exists U : \varphi U \subseteq U, \dim U = 2$ mithilfe χ_φ.
      ii. $\varphi U^\perp \subseteq U^\perp$
      iii. $U \subsetneq U^\perp$: Betrachte $s|_{t=0}$.
      iv. Fall $U \cap U^\perp \neq \{0_V\}$ mit vorherigen Schritten. Ab jetzt $U \cap U^\perp = \{0_V\}$.
      v. Eventuell: vertausche $U, U^\perp$, damit $s|_U$ positiv definit ist; aus der Definition von s und den Dimensionen.
      vi. $\det \varphi|_U = \det \varphi|_{U^\perp} = \pm 1$ mit s und Multiplikativität.
      vii. $\det \varphi|_U = -1$: Spiegelung. Begründe mit $\chi_{\varphi|_U}$ und Fallunterscheidung.
      viii. $\det \varphi|_U = 1$ mit $s|_{U^\perp}$, damit $\varphi|_{U^\perp} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.