Lineare Algebra II: Übungsstunde 8

Florian Frauenfelder
`https://florian-frauenfelder.ch/ta/linalg/`

14.04.2025

> **Wichtig**: Die nächste Übungsstunde findet wegen Sechseläuten erst am 5.5.25 statt!

1 Quiz 21: Lösungsvorschlag

1.1 Aufgabe 21.1

Aus Korollar 13.10.3 im Skript wissen wir, dass hier $(T_A)^* = T_{A^*}$ gilt, also:

$$\boxed{A^* = \overline{A}^\top = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \tag{1}$$

1.2 Aufgabe 21.2

Da hier nur $A = QR \neq \mathbf{1}_2$ verlangt ist, können wir eine von R, Q gleich $\mathbf{1}_2$ setzen und die andere gemäss den Regeln ($Q \in O(2), R$ eine obere Dreiecksmatrix) frei wählen und die beiden multiplizieren, um A zu erhalten. Dies funktioniert, da Satz 13.7.11 aus dem Skript beweist, dass eine (gefundene) QR-Zerlegung eindeutig ist.

Zwei Beispiele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Q_1 \cdot R_1 = \mathbf{1}_2 \cdot R_1 \tag{2}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Q_2 \cdot R_2 = Q_2 \cdot \mathbf{1}_2 \tag{3}$$

2 Feedback Serie 20

5. b) Mit «und der jeweiligen Basis aus (a)» ist hier die berechnete Orthonormalbasis gemeint, also sind eine (2×3)- und eine (1×3)-Matrix gesucht (Darstellungsmatrizen sind Koeffizienten-Transformationsmatrizen!).

3 Theorie-Recap letzte Woche

Behandelte Themen: Adjungierte Abbildung, orthogonal diagonalisierbare und normale Abbildungen.

3.1 Zusätzliches Material

Zu Lemma 13.9.8 (2):

Beweis.

$$\begin{aligned}
\langle(\lambda T)^* w, v\rangle_V &= \langle w, (\lambda T)v\rangle_W \\
&= \langle w, T(\lambda v)\rangle_W \\
&= \langle T^* w, \lambda v\rangle_V \\
&= \overline{\lambda}\langle T^* w, v\rangle_V \\
&= \langle \overline{\lambda}(T^* w), v\rangle_V \\
&= \langle (\overline{\lambda} T^*) w, v\rangle_V \\
\implies (\lambda T)^* &= \overline{\lambda} T^*
\end{aligned}$$

□

Zu Lemma 13.9.8 (4):

Beweis.

$$\begin{aligned}
\langle(RT)^* u, v\rangle_V &= \langle u, (RT)v\rangle_U \\
&= \langle u, R(Tv)\rangle_U \\
&= \langle R^* u, Tv\rangle_W \\
&= \langle T^*(R^* u), v\rangle_V \\
&= \langle (T^* R^*) u, v\rangle_V \\
\implies (RT)^* &= T^* R^*
\end{aligned}$$

□

4 Aufgaben

Angepasst, von Joshua Dreier:

Beispiel 1. *Betrachte* $V := \mathbb{R}^2$ *mit dem inneren Produkt*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_A : V \times V \to \mathbb{R} \tag{4}$$

$$(u, v) \mapsto \langle u, v\rangle_A = u^\top A v \tag{5}$$

mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

und der Abbildung T mit

$$[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} \equiv B := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Finde T^*, indem du $[T^*]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ bestimmst.

Lösung. Da unsere Einheitsbasis $\mathcal{E}$ bezüglich unseres inneren Produktes nicht orthonormal ist, können wir das Resultat aus der Vorlesung (Korollar 13.10.3: $(T_A)^* = T_{A^*}$) nicht direkt verwenden. Es gibt (mindestens) zwei Lösungswege:

- Wir rechnen die einzelnen Matrixeinträge aus mithilfe der definierenden Eigenschaft der adjungierten Abbildung (nicht weiter interessant, führt aber zum Ziel).
- Wir benutzen die Eigenschaften der adjungierten Abbildung und des inneren Produktes, um die Matrix direkt zu berechnen:

Betrachte die Eigenschaft der adjungierten Abbildung mit zwei zufälligen Vektoren $u, v \in V$:

$$(Tv)^\top Aw = \langle Tv, w\rangle_A = \langle v, T^* w\rangle_A = v^\top A(T^* w). \tag{8}$$

Als Nächstes schreiben wir die gesuchte Abbildungsmatrix $[T^*]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} =: C$ und setzen gleichzeitig die obige Definition von B ein. Dies funktioniert, da wir uns nur mit einer Basis beschäftigen und somit keine Basiswechselmatrizen beachten müssen. Wir schreiben nun obige Identität mithilfe den Gesetzen der Matrixmultiplikation unter Transposition um:

$$v^\top B^\top Aw = v^\top ACw. \tag{9}$$

Da diese Identität $\forall v, w \in V$ gelten muss, kann man sie durch die Matrizen alleine ausdrücken und erhält:

$$B^\top A = AC \implies C = A^{-1}B^\top A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = [T^*]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}} \tag{10}$$

Durch explizite Rechnungen kann dies überprüft werden. □

Aufgaben mit HSxx *oder* FSxx *sind aus der Prüfungssammlung des VMP entnommen:*
`https://exams.vmp.ethz.ch/category/LineareAlgebraIII`

Weitere Aufgaben:

- Gibt es für die behandelten Themen kaum. Schau dir nochmals Aufgaben zur QR-Zerlegung von letzter Woche an.

Tipps zur Serie 21 auf der nächsten Seite!

5 Tipps zur Serie 21

Versuche zuerst 1, 2, 3, 4 zu lösen und schau dir sicher die Aussagen der anderen Aufgaben auch an.

1. Ähnlich zu Satz 13.7.11 aus dem Skript.
2. Benutze $Q^{-1} = Q^\top$ um das Gleichungssystem zu lösen.
4. Was kannst du über den Eigenraum zum Eigenwert 1 sagen?
   v ist ein Fixpunkt $\iff Av = v$.
5. Nimm an, dass ein $g \in V$ existiert, was die Bedingungen erfüllt. Dann betrachte:
   - $f_0 \equiv 0$
   - h stetig und positiv auf einem kleinen Intervall, sonst 0.
6. b) Empfehlung: Induktion über $\dim U$.
   c) Finde Eigenvektoren in orthogonalen Komplementen.
7. c) Benutze (b).
   e) Betrachte formal die Abbildung
   $$\begin{aligned} \varphi_x : \mathbb{C}^n &\to \mathbb{C} && (11) \\ y &\mapsto \langle x, y \rangle. && (12) \end{aligned}$$
   f) Benutze, dass C^*AC hermitesch ist, um die erste Spalte mit (e) zu zeigen. Wieso reicht das?
   h) Schreibe die Koeffizienten aus und benutze die Orthogonalität.
   j) Benutze (h) und (i) und gehe ähnlich vor wie in (h).
8. a) Erweitere einen allgemeinen Vektor mit Nullen, um die richtige Dimension zu erhalten.
   c) Benutze Eigenschaften der Determinanten.
   e) Beweise wie in (c).
   f) Benutze $A|_{V_{k-1}} = A^{(k)}|_{V_{k-1}}$.
   g) Benutze $A|_{V_k} = A^{(k)}$ und benutze Sylvester aus (7).