Lineare Algebra II: Übungsstunde 7

Florian Frauenfelder
https://florian-frauenfelder.ch/ta/linalg/

07.04.2025

1 Quiz 20: Lösungsvorschlag

1.1 Aufgabe 20.1

Da die Menge S aus zwei linear unabhängigen Vektoren besteht, suchen wir einen eindimensionalen Unterraum. Diesen finden wir über die Bedingung:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \perp s, \forall s \in S \iff v_1 + v_2 + v_3 = 0 = v_1 + v_2, \tag{1}$$

woraus wir direkt sehen, dass $v_3 = 0$ sein muss. Damit haben wir noch eine freie Variable und erhalten somit den gesuchten Unterraum:

$$\boxed{S^\perp = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \leq \mathbb{R}^3. \tag{2}$$

1.2 Aufgabe 20.2

Wir suchen eine Matrix, deren Spalten *keine* Orthonormalbasis bilden. Einige Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 1} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \tag{3}$$

wobei alle bis auf die zweitletzte nicht invertierbar sind und damit sofort keine Basis in den Spalten haben. Die Spaltenvektoren der zweitletzten bilden zwar eine Basis, welche aber weder orthogonal noch normalisiert ist.

2 Feedback Serie 19

1. Ein Parameter im inneren Produkt darf nicht von den Vektoren abhängig sein, da damit die Bedingungen an das innere Produkt (welche ja $\forall v \in V$ gelten müssen) nicht erfüllt sind.

2. An der Prüfung braucht es bei einer solchen Aufgabe eine Erklärung, weshalb das (uneigentliche) Integral konvergiert. Ein kurzer Satz reicht: «e^{-t} fällt viel schneller ab, als jedes Polynom wächst, womit gemäss Analysis das Integral immer konvergiert.»

6. Vorsichtig mit der Definition von positiv definit: $x^\top B\overline{x} > 0$ ist die Definition aus der Vorlesung. Wir haben (noch) nicht gezeigt, dass das äquivalent dazu ist, dass $\sigma(B) \subseteq \mathbb{R}_+$.

3 Theorie-Recap letzte Woche

Behandelte Themen: Orthogonales Komplement und QR-Zerlegung.

3.1 Zusätzliches Material

Bemerkung zu Lemma 13.6.4:

2. Hier gilt: $S \cap S^\perp = \varnothing \iff 0_V \notin S \implies S \nleq V$.
3. Hier gilt: $S^\perp = P^\perp \iff \operatorname{span} S = \operatorname{span} P$.
5. Hier gilt: $S = (S^\perp)^\perp \iff U \leq V$ (siehe auch Satz 13.6.10).

Ein «Rezept» um die QR-Zerlegung einer invertierbaren Matrix $B \in GL_n(\mathbb{C})$ zu bestimmen (analog für $A \in GL_n(\mathbb{R})$):

1. Wir wissen, dass die Spalten von B eine Basis bilden, da B invertierbar ist. Schreibe B als Zusammensetzung dieser Basisvektoren $\{v_j\}_{1\leq j\leq n}$:
$$B = (v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_n) \tag{4}$$

2. Wende das Gram-Schmidt-Verfahren auf die $\{v_j\}$ an, um eine geordnete *orthogonale* Basis $\{\tilde{w}_j\}$ zu erhalten.

3. Normalisiere die $\{\tilde{w}_j\}$, um eine *Orthonormalbasis* $\{w_j\}$ zu erhalten.

4. Schreibe die gefundene geordnete Orthonormalbasis als Spaltenvektoren in eine Matrix, um Q zu erhalten:
$$Q := (w_1 \mid w_2 \mid \cdots \mid w_n) \tag{5}$$

5. Berechne die benötigten inneren Produkte wie folgt, um R zu erhalten:

$$R := \begin{pmatrix} \langle v_1, w_1 \rangle & \langle v_2, w_1 \rangle & \cdots & \langle v_n, w_1 \rangle \\ 0 & \langle v_2, w_2 \rangle & \cdots & \langle v_n, w_2 \rangle \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \langle v_n, w_n \rangle \end{pmatrix} \iff r_{ij} := \begin{cases} \langle v_j, w_i \rangle & i \leq j \\ 0 & i > j \end{cases} = \langle v_j, w_i \rangle \tag{6}$$

6. Jetzt haben wir die Zerlegung gefunden, es gilt:

$$B = Q \cdot R \tag{7}$$

7. Prüfe kurz nach, ob du keinen systematischen Fehler gemacht hast, indem du beispielsweise b_{11}, b_{12}, b_{21} aus QR berechnest.

4 Aufgaben

Aufgaben mit HSxx *oder* FSxx *sind aus der Prüfungssammlung des VMP entnommen:* `https://exams.vmp.ethz.ch/category/LineareAlgebraIII`

Besprochene Aufgaben:

- FS03: 7.6 ($O(n)$)
- HS03: 1i ($O(n)$)
- HS05: 7h ($U(n)$)

Weitere Aufgaben:

- HS00: 4 (orthogonale Projektion, aufwändig)
- HS00: 6a ($O(n)$)
- FS01: 4 (orthogonale Projektion, aufwändig)
- FS01: 6a ($O(n)$)
- HS05: 2ab ($O(n)$)

Tipps zur Serie 20 auf der nächsten Seite!

5 Tipps zur Serie 20

Versuche zuerst 2, 3, 4, 5 zu lösen.

1. a) Betrachte $\|x-y\|^2$.
   b) Benutze die inverse Dreiecksungleichung (Wikipedia).
   c) Zeige $\langle v, u\rangle = \|v\|$ (wieso reicht das?) mithilfe von $\|v-u\|^2$.

3. Benutze das innere Produkt aus Serie **19**, Übung 6: $\langle A, B\rangle := \operatorname{Tr}(A^\top B)$ und Gram-Schmidt.

4. Ergänze Basen und benutze Gram-Schmidt «theoretisch».

5. b) Benutze eine explizite Formel für die orthogonale Projektion: $\mathrm{pr}_U : v \mapsto \langle w_1, v\rangle w_1 + \langle w_2, v\rangle w_2$ (wieso gilt das?).

6. Finde invariante Unterräume und wende Gram-Schmidt an.

7. a) *Bemerkung: Hier geht es um den Raum der quadratsummierbaren Folgen ℓ^2, welchen man unter anderem in MMP I behandelt.*
   b) Aufwändig. Die wichtigsten Schritte (zeige alles mit Funktionenfolgen und deren Grenzwerten):
      i. Zeige, dass $h \in U^\top$ auf $[\frac{1}{2}, 1]$ verschwindet.
      ii. Zeige, dass $g \in U^\top$ auf $[0, \frac{1}{2}]$ konstant ist.
      iii. Benutze die Stetigkeitsbedingung, um die Lösung zu erhalten.