Lineare Algebra II: Übungsstunde 6

Florian Frauenfelder
https://florian-frauenfelder.ch/ta/linalg/

31.03.2025

1 Quiz 19: Lösungsvorschlag

1.1 Aufgabe 19.1

Da die Orthogonalität durch Addition und Skalarmultiplikation nicht verloren geht, erhalten wir einen Unterraum W, der genau alle Vektoren enthält, die orthogonal zu x sind. Wir suchen also Vektoren w, die Folgendes erfüllen:

$$\begin{aligned}
&& w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \perp x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} && (1)\\
\iff && 0 = \langle x, w \rangle = w_1 + w_2 + w_3 && (2)\\
\iff && w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ -w_1 - w_2 \end{pmatrix} && (3)\\
\implies && W = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ -w_1 - w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, w_1, w_2 \in \mathbb{R} \right\} = \boxed{\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}} = \cdots && (4)
\end{aligned}$$

1.2 Aufgabe 19.2

Wir setzen in die Formel für die Projektion ein, wobei «Projektion [...] auf z» die Abbildung proj_z meint:

$$\operatorname{proj}_z y := \frac{\langle y, z \rangle}{\langle z, z \rangle} \cdot z = \frac{1 + 2 + 0}{1 + 4 + 1} \cdot z = \boxed{\frac{1}{2} \cdot z = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}} \tag{5}$$

2 Feedback Serie 18

2. Der Eigenvektor in einer Jordankette kann irgendeiner aus dem Eigenraum des Eigenwerts sein und muss nicht einer der (kanonisch) berechneten sein.

   Beachte auch immer, dass die Jordankette in umgekehrter Reihenfolge (also mit dem Eigenvektor am Anfang) geschrieben werden muss, dass die 1-Einträge über der Diagonalen stehen und nicht darunter. Dies kann man sich merken, da der *erste* Eintrag im Jordanblock der einzige ist, der einen Eigenvektor «erzeugt», womit der Eigenvektor der Jordankette an *erster* Stelle stehen muss.

5. Hier braucht es eine Begründung, wieso die gefundene Jordansche Normalform denn eindeutig ist (beispielsweise mit den Eigenschaften des minimalen und charakteristischen Polynoms angewendet auf die Jordanblöcke).

3 Theorie-Recap letzte Woche

Behandelte Themen: Erzeugung innerer Produkte, Orthogonalität und Gram-Schmidt-Algorithmus.

3.1 Zusätzliches Material

Notation (Lineare Hülle)**.** *Um Verwechslung mit dem inneren Produkt zu vermeiden, schreiben wir für die lineare Hülle einer Menge S ab jetzt:*

$$\mathrm{span}(S) \equiv \langle\langle S\rangle\rangle \equiv \mathrm{LH}(S). \tag{6}$$

Ein kleines, aber wichtiges Detail zum Satz des Pythagoras: Konventionell wird nur die Aussage, dass zwei orthogonale Vektoren die bewiesene Eigenschaft haben, als Satz des Pythagoras bezeichnet. Die Rückrichtung gilt ebenfalls (Übung), wird aber meist nicht genannt.

4 Aufgaben

(*Inspiriert von Aufgabe FS00: 3*) Eine Anleitung für die Konstruktion von inneren Produkten: Angenommen, wir haben eine Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ eines n-dimensionalen Vektorraumes mit folgenden Aufgaben:

1. Schreibe ein inneres Produkt hin, bezüglich dessen die gegebene Basis orthonormal ist.

2. Schreibe das innere Produkt als Matrix in der Standardbasis auf.

Mein Lösungsvorschlag für solche Problemstellungen:

1. Wir definieren das innere Produkt folgendermassen: $\langle v_i, v_j\rangle := \delta_{ij}$, wobei δ_{ij} das Kronecker-Delta bezeichnet. Damit haben wir bereits beide Voraussetzungen erfüllt: Orthogonalität mit $\langle v_i, v_j\rangle = 0, \forall i \neq j$ und Normalisierung mit $\langle v_j, v_j\rangle = 1, \forall j$.

2. Dieses innere Produkt nun in der Standardbasis hinzuschreiben benötigt etwas Vorarbeit:

   a) Wir schreiben die Standardvektoren $\{e_1, \dots, e_n\}$ als Linearkombinationen der v_j auf:

   $$e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} v_j \tag{7}$$

   b) Damit berechnen wir nun das innere Produkt für alle nötigen Kombinationen von Einheitsbasisvektoren. Dank der Eigenschaft, dass Matrizen, die innere Produkte definieren, immer hermitesch (oder symmetrisch für $\mathbb{R}$-Vektorräume) sein müssen, müssen wir nur $\frac{n^2+n}{2} \leq n^2$ Berechnungen durchführen, um die Matrix vollständig zu bestimmen: Wir berechnen beispielsweise $\langle e_i, e_j\rangle, \forall i \leq j$.

   c) Diese Werte können wir nun direkt in eine Matrix A eintragen, wobei $a_{ij} := \langle e_i, e_j\rangle$ definiert ist. Dies kann man aus der «Matrixnotation» des inneren Produktes einfach herleiten: $\langle v, u\rangle_A = v^\top A \overline{u}$.

Diese Konzepte können auch auf andere, verwandte Aufgabentypen angewendet werden: Finde eine Orthonormalbasis bezüglich einer gegebenen hermiteschen Matrix, die ein inneres Produkt induziert.

Besprochene Aufgaben:

- FS00: 3 (inneres Produkt)
- HS04: 1i, ii (Gram-Schmidt)

Weitere Aufgaben:

- HS00: 5 (inneres Produkt)
- HS01: 2 (Symmetrie)
- HS03: 2 (Gram-Schmidt)
- FS05: 1 (Gram-Schmidt)

Tipps zur Serie 19 auf der nächsten Seite!

5 Tipps zur Serie 19

1. Prüfe Positivität des inneren Produktes; die Symmetrie und Bilinearität folgen direkt aus der Definition und sind nicht weiter spannend.

2. Ein wenig Analysis mit partieller Integration: Wieso konvergiert das Integral?

3. Zeige, dass $T - \sqrt{2}\mathbf{1}_V$ injektiv ist (also $\ker(T - \sqrt{2}\mathbf{1}_V) = \{0_V\}$). Wieso reicht das?

4. Was kannst du über $\|u + av\|^2$ sagen? Benutze dies und die Eigenschaften der Norm und des inneren Produktes.

5. $\Longrightarrow$ ist einfach. Um $\Longleftarrow$ zu zeigen, empfehle ich folgende Vorgehensweise: Definiere $\langle x, y\rangle := \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \cdots (?)$ und zeige zuerst Symmetrie und Positivität. Für die Linearität reicht dank der Symmetrie die erste Variable (sehr aufwändig): Beginne mit der Additivität und folgere daraus die Skalarmultiplikativität mit $\alpha = -1$, dann $\alpha \in \mathbb{Z}$, verallgemeinere zu $\alpha \in \mathbb{Q}$ und betrachte die Abbildung $t \mapsto \langle tx, y\rangle - t\langle x, y\rangle$, um schlussendlich $\alpha \in \mathbb{R}$ zu zeigen.

6. Prüfe die Bedingungen an eine Norm und verwende die Summennotation der Spur. Die Orthonormalbasis braucht kein Rechnen, sondern nur logisches Überlegen :)

7. Rechne $x^\top Bx$ explizit aus und bringe es algebraisch in die richtige Form (aufwändig), um zu zeigen, dass $\det B > 0$ und $a > 0$ hinreichende Bedingungen sind. Benutze die Vektoren
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}, \tag{8}$$
um zu zeigen, dass dieselben Bedingungen auch notwendig sind.