Lineare Algebra II: Übungsstunde 3

Florian Frauenfelder
https://florian-frauenfelder.ch/ta/linalg/

10.03.2025

1 Quiz 16: Lösungsvorschlag

1.1 Aufgabe 16.1

Theorem 1 (Cayley-Hamilton)**.** *Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K und $T : V \to V$ ein linearer Endomorphismus, dann gilt:*

$$\chi_T(T) = \mathbf{0}, \tag{1}$$

wobei $\chi_T(x)$ das charakteristische Polynom von T und $\mathbf{0}$ die Nullabbildung bezeichnen.

Eine andere, äquivalente Formulierung lautet:

Theorem 2 (Cayley-Hamilton)**.** *Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$, dann gilt:*

$$\chi_A(A) = \mathbf{0}_{n\times n}, \tag{2}$$

wobei $\chi_A(x)$ das charakteristische Polynom von A und $\mathbf{0}_{n\times n}$ die Nullmatrix bezeichnen.

Im Skript entspricht Theorem 1 dem Theorem 11.2.1.

1.2 Aufgabe 16.2

Hier gibt es mehrere mögliche Lösungen:

- Es handelt sich um einen Jordanblock der Länge zwei mit $\chi_A(x) = (1-x)^2$, und für Jordanblöcke gilt $\chi_A(x) = m_A(x)$, also ist hier $m_A(x) = (1-x)^2$.
- Man berechnet $\chi_A(x) = (1-x)^2$ und weiss, dass $m_A(x) \mid \chi_A(x)$ gilt, also $m_A(x)$ entweder $(1-x)^2$ oder $(1-x)$ sein muss. Da ebenfalls $m_A(A) = \mathbf{0}_{n\times n}$ gilt, muss also $m_A(x) = (1-x)^2$ gelten, da $\mathbf{1}_n - A \neq \mathbf{0}_{n\times n}$ ist.

2 Feedback Serie 15

2. Vorsicht mit Konstanten-Multiplikation in Determinanten: Wenn das Argument mit -1 multipliziert wird, dann muss man dies mit $(-1)^n$ aus der Determinante ziehen.

4. Ein (im Moment) noch wichtiger Teil des Beweises: Ist 0 immer ein Eigenwert? Dies muss separat gezeigt werden.

5. b) Was passiert, wenn $Gv = 0_V$? Dann funktioniert der «normale» Beweis nicht mehr.

7. Vorsicht bei der Definition eines invarianten Unterraums: siehe unten.

3 Theorie-Recap letzte Woche

Behandelte Themen: Minimalpolynom, Cayley-Hamilton, Jordansche Normalform.

3.1 Zusätzliches Material

Definition (Begleitmatrix)**.** *Sei $p(x) \in K[x]$ mit $\partial p = k > 0$ monisch (also in der Form $p(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$), dann nennen wir folgende Matrix die Begleitmatrix von $p(x)$ (diese wird in späteren Kursen für Physiker noch wichtiger werden):*

$$A(p) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix} \in K^{k\times k}. \tag{3}$$

Definition (Invarianter Unterraum)**.** *Sei $T : V \to V$ linear, dann heisst $W \leq V$ ein T-invarianter Unterraum $\iff T(W) \subseteq W$.*

4 Aufgaben

Lemma 1. *Seien $A, B \in K^{n\times n}$, dann gilt:*

$$A \sim B \iff J_A(x) = J_B(x) \tag{4}$$

Beweis. Wir zeigen zuerst $\implies$: Es gilt von der Definition der Ähnlichkeit von Matrizen:

$$A \sim B \iff \exists P \in GL_n(K) : B = P^{-1}AP. \tag{5}$$

Ebenfalls erhalten wir von der Jordanschen Normalform die Basiswechselmatrizen der Jordanbasen, sodass

$$J_A = Q^{-1}AQ \qquad J_B = R^{-1}BR \qquad Q, R \in GL_n(K) \tag{6}$$

gelten. Also können wir das umformen, um zu erhalten:

$$J_B = R^{-1}P^{-1}APR = R^{-1}P^{-1}QJ_AQ^{-1}PR, \tag{7}$$

was auch einer Ähnlichkeit entspricht. Da die Jordansche Normalform bis auf Vertauschung der Blöcke aber eindeutig ist (was immer als Basiswechsel (genauer: Basispermutation) geschrieben werden kann, Beispiel siehe unten), folgern wir daraus, dass mit einer Vereinbarung einer Standardanordnung der Jordanblöcke sogar

$$J_B = J_A \tag{8}$$

gilt, also $R^{-1}P^{-1}Q = \mathbf{1}_n$.

Die Rückrichtung $\Longleftarrow$ ist schneller gezeigt: Wir haben zwei Matrizen mit derselben Jordanschen Normalform:

$$A, B \in K^{n\times n} : J_A = J_B =: J. \tag{9}$$

Wir schreiben mithilfe der Basiswechselmatrizen der Jordanbasen:

$$A = QJQ^{-1} \qquad B = RJR^{-1}, \tag{10}$$

womit wir direkt sehen, dass

$$B = RQ^{-1}AQR^{-1} \tag{11}$$

gilt, was die Ähnlichkeit zeigt. □

Ein Beispiel zu Basiswechselmatrizen, die eine Basispermutation durchführen, um Jordanblöcke zu vertauschen: Wir nehmen zwei Matrizen, die dieselbe Jordansche Normalform haben:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Der Basiswechsel entspricht hier dem Vertauschen der beiden Jordanblöcke $J_1(1)$ und $J_1(2)$ mit

$$P = P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

damit $B = P^{-1}AP$ gilt.

(Im Allgemeinen entspricht dieser Typ von Basispermutationsmatrix immer einer Matrix, die aus der gewünschten Permutation der Einheitsbasisvektoren als Spalten zusammengesetzt ist; in diesem Beispiel ist $P = (e_2 \mid e_1)$.)

Lemma 2. *Seien $A, B \in K^{n\times n}$, dann gilt:*

$$A \sim B \implies \chi_A(x) = \chi_B(x). \tag{14}$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 1, da $J_A = J_B \implies \chi_A(x) = \chi_B(x)$. □

Ein anderer Beweis, ohne Lemma 1 zu benutzen:

Beweis. Wir benutzen die Multiplikativität der Determinante für $B = P^{-1}AP$:

$$\begin{aligned}
\chi_B(x) &= \det(B - x\mathbf{1}_n) && (15)\\
&= \det(P^{-1}AP - x\mathbf{1}_n) && (16)\\
&= \det(P^{-1}AP - xP^{-1}\mathbf{1}_nP) && (17)\\
&= \det(P^{-1}(A - x\mathbf{1}_n)P) && (18)\\
&= \cancel{\det P^{-1}}\det(A - x\mathbf{1}_n)\cancel{\det P} && (19)\\
&= \chi_A(x) && (20)
\end{aligned}$$

□

Achtung: Lemma 2 ist keine Äquivalenz, sondern nur eine einseitige Implikation! Ein Gegenbeispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}_2 \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Diese beiden Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom $\chi_A(x) = \chi_B(x) = (1-x)^2$, sind aber nicht ähnlich. Dies lässt sich auf verschiedene Arten zeigen; eine schnelle Variante ist zu zeigen, dass B nicht diagonalisierbar ist (da $B = J_2(1)$).

Aufgaben mit HSxx *oder* FSxx *sind aus der Prüfungssammlung des VMP entnommen:* `https://exams.vmp.ethz.ch/category/LineareAlgebraIII`

Besprochene Aufgaben:

- HS02: 7.3
- FS06: 7g

Weitere Aufgaben:

- HS04: 4
- HS07: 3

Tipps zur Serie 16 auf der nächsten Seite!

5 Tipps zur Serie 16

1. -
2. Erinnere dich an die Definition von Diagonalisierbarkeit und Basiswechselmatrizen.
3. Betrachte und faktorisiere $f^2v - v = 0_V = v - f^2v$.
4. Faktorisiere eine Nullstelle: $p(x) = (x - \lambda)q(x)$, und überlege, was man über $q(x)$ sagen kann.
5. Überlege, welche Funktionen Eigenfunktionen der Ableitungsabbildung zum Eigenwert 1 sind (also $f' = f$), und verallgemeinere dieses Resultat. Weshalb sind das alle Resultate?
6. Notation in dieser Aufgabe: $p_A := \chi_A$
   a) Benütze die Eigenschaften der Determinante.
   b) Polynomumformungen (beachte: $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{1}_n$)
   c) Anwendung von b)